AZ ÉLETTARTAMOK STATISZTIKÁJA

RADNÓTI LÁSZLÓ

A szerző az élettartamok statisztikájának különféle területeit mutatja be a valószínűség-számításban és a matematikai statisztikában tájékozott olvasóknak. A halandósági táblák elméletéből a Központi Statisztikai Hivatalban alkalmazott módszerek részletes ismertetése mellett az aktív népesség halandósági táblájának becslését tárgyalja. Az élettartamok statisztikájának újabban érdeklődést keltő területei közül az elvesztett potenciális életévek számításának módszertanára tér ki bővebben. A számítások a Központi Statisztikai Hivatal kiadványaiból – a statisztikai és a demográfiai évkönyvekből – származó adatokra támaszkodnak.

Tárgyszó: Várható élettartam. Halálozási arányszám. Kiegyenlítési eljárás.

Az i személyről a saját $X_i(t)$ életútja nyújtja a legközvetlenebb információt. Ez az életút értékeit valamilyen állapottérben felvevő sztochasztikus folyamat és egy t_0 időpontig már ismert. A valóság természetesen túl bonyolult ahhoz, hogy mindenestől egyetlen modellben bemutassuk. A valóságban egy dinamikus – szaporodó és halálozó – $\wp$ populáció egyedeinek életútjai közös valószínűségi mezőn zajlanak le, és eközben járulékosan különböző kapcsolatok jönnek létre az egyedek között. Ezeket vizsgálva eljuthatunk a tökéletes és a tökéletesen használhatatlan társadalommodellhez. Az égi mechanikához hasonlóan egyszerű modelleket kell vizsgálnunk, melyek bár speciális esetként se fordulnak elő a valóságban, mégis sok szempontból kielégítő információt szolgáltatnak a valóság egészére vonatkozólag.

Bizonyos közgazdasági kérdések tanulmányozásához elegendő lehet, ha az életutat egy sztochasztikus cash-flow-val, esetleg egy kezdőtőkével modellezzük. Ha a modellt exogén változóként kiegészítjük egy időben változó, esetleg sztochasztikus kamattal, máris érdekes kérdéseket fogalmazhatunk meg. A modellbe nem kell feltétlenül az adott személy életével összefüggő valamennyi cash-flow-t belefoglalni. Gyakori biztosításmatematikai feladat egy életbiztosítás kapcsán felmerülő cash-flow várható jelenértékének a meghatározása. A díjszámításban megkövetelten érvényesülő ekvivalencia elv azt jelenti, hogy ennek – legalábbis a költségeket és a biztosító által érvényesíthető nyereséget nem tartalmazó nettó cash-flow-ra vonatkozólag – bizonyos pesszimista feltevések mellett nullának kell lennie. A díjtartalékképzés alapmegfontolása az, hogy minden egyes kötvényre vonatkozólag, amennyiben a várható jelenérték negatív – jó termékek esetében általában ez a helyzet –, azaz a még várható díjbevételt meghaladó összegű kötelezettség várható, akkor ennek a többletkötelezettségnek megfelelő befektetett formában mindenkor tartalékban kell állnia.

Fontos speciális biztosítás az életjáradék. Amikor elméleti szinten járadékról beszélünk, akkor tulajdonképpen nem a biztosításról szólunk, aminek cash-flow-jához a járadéktőke valamilyen formában való felhalmozása is hozzátartozik, hanem csak a biztosított által haláláig egyenlő időszakonként felvett egyenlő összegekről. Ha az értékeléshez használt technikai kamatlábat nullának vesszük, akkor a havi $\frac{1}{12}$ euró járadék várható jelen értéke dimenziótól eltekintve jól közelíti a járadékfizetés indulásakor várható élettartamot.

A biztosításmatematika, illetve járadékszámítás történetét a *Sibbett* és *Haberman* [1995] által szerkesztett monográfia, illetve a *Kopf* [1927] tanulmánya tárgyalja. Egyes feltételezések szerint a járadékok i.e. 2500 körül jelennek meg Kis-Ázsiában, a fejlett pénzügyi rendszerrel rendelkező Babilonban, feltehetőleg kínai és indiai előzmények után. A járadékok pénzügyi értékelésével foglalkozó próbálkozások első dokumentumai az ókori Rómában jelentek meg. *Ulpianus* császár idején járadékértékelési táblázatok készültek. Ezek feltehetőleg nem tartalmaztak kamatot, tehát a várható élettartamot becsülték különböző életkorokban. Ulpianus halandósági táblái elég vitatható adatokat tartalmaznak, pedig a rövid élettartamok esetén kohorszokból vett minták átlagával igen egyszerűen becsülhető a várható élettartam. A halandóság vizsgálatában először *J. Graunt* alapos elemzései vezettek meggyőző eredményekre a XVII. század végén. A mai modern halandósági táblához pedig *Halley* és *Euler* kutatásai révén jutottunk el. Azóta a módszereket számos statisztikus és biztosításmatematikus finomította.

A halandósági táblák módszertana

A halandósági táblával kapcsolatban előrebocsátunk néhány közismert jelölést, melyekhez hasonlókat a matematikai demográfiában sűrűn alkalmazunk. Ezek:

x – a betöltött kor,

B – az élveszületések száma a naptári év folyamán,

P_x – az x évesek száma a naptári év elején,

D_x – az év folyamán x évesen meghaltak száma,

D'_x – azon meghaltak száma, akik x-edik születésnapjukat az adott naptári évben töltötték be,

D''_x – azon meghaltak száma, akik x-edik születésnapjukat a megelőző naptári évben töltötték be,

m_x – a korspecifikus halálozási arány,

q_x – x és x+1 év egzakt életkor közötti halálozás valószínűsége, feltéve az x éves élettartam elérését (nyers elhalálozási valószínűség, a kiegyenlített elhalálozási valószínűséget $\overline{q}_x$ -szel jelöljük),

$p_x = 1 - q_x$ – az x+1 éves egzakt életkor elérésének valószínűsége,

${}_n p_0 = \prod_{i=0}^{n-1} p_i$ – az x éves egzakt életkor elérésének valószínűsége,

$l_x = 100\,000\ {}_x p_0$ – $l_0 = 100\,000$ élveszületettből az x éves kort elérők száma,

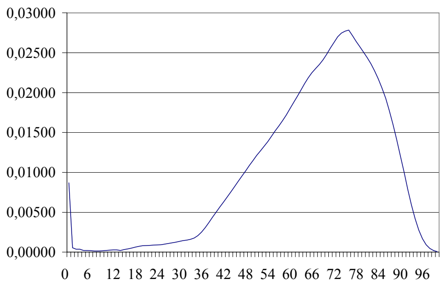
$d_x = l_x - l_{x+1}$ – százezer élveszületettből x évesen meghaltak száma,

L_x – a stacioner népesség koreloszlása,

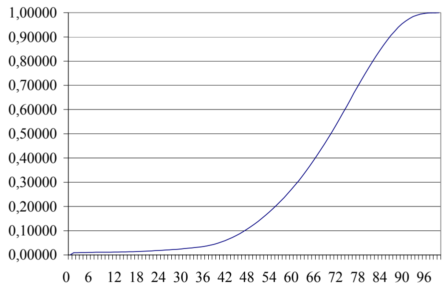
e_x^0 – az x éves korban még várható élettartam.

Az 1–3. ábrán Magyarország férfi népességének 2001. évi halandósági táblája alapján mutatjuk be az élettartam eloszlását és továbbélési függvényét. A 4. ábrán a nyers és kiegyenlített halandósági valószínűségeket láthatjuk. Az illeszkedés jóságát az ábrán is megfigyelhetjük.

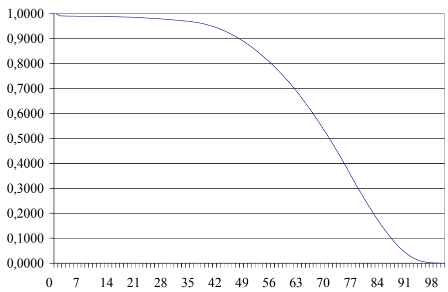
1. ábra. A férfi népesség élettartam sűrűségfüggvénye



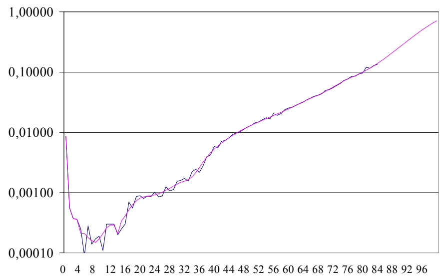
2. ábra. A férfi népesség élettartam eloszlásfüggvénye



3. ábra. A férfi népesség továbbélési függvénye



4. ábra. A férfi népesség nyers és kiegyenlített elhalálozási valószínűsége



A várható élettartam

A vizsgált populáció véletlen egyedének élettartamát T-vel jelölve az x éves korban még várható élettartam a definíció szerint:

$$e_x^0 = E\left(T \mid T \ge x\right) - x \,.$$

A várható értéket az eloszlásfüggvény segítségével kifejezve és parciálisan integrálva:

$$E\left(T \mid T \ge x\right) = \int_0^\infty t\,dF\left(t \mid t \ge x\right) = \frac{1}{{}_x p_0} \int_x^\infty {}_t p_0\,dt + x \,,$$

ahol $F(t)$ a T valószínűségi változó eloszlása és ${}_t p_0 = 1 - F(t)$ a továbbélési valószínűség születéstől t éves korig.

A félegyenest a halandósági tábla korcsoportjainak megfelelően felosztva és az ezen intervallumokon vett integrálok összegére bontva a várható élettartamnak a stacioner népesség koreloszlásával való szokásos kifejezéséhez jutunk. A koréves halandósági tábla esetében

$$e_x^0 = \frac{1}{l_x}\sum_{i=x}^{100} L_i .$$

Halálozási arányszámok, a halálozási és továbbélési valószínűségek becslése

A rövidített halandósági tábla az élettartamot reprezentáló pozitív félegyenes 1, 4, 5, 10, …, 85 osztópontokkal való felosztásán alapul, 5 és 85 év között egyforma beosztást alkalmaz. Ez 18 szakaszra és egy félegyenesre – a továbbiakban ezt is szakasznak tekintjük – bontja az élettartamot. A jelölések hasonlók az előzőkben bevezetettekhez, ám az egyszerűség kedvéért a mennyiségek indexébe nem az életkor kerül, hanem azon intervallum sorszáma, amelyre a mennyiség vonatkozik.

Legyen az i-edik korcsoportban meghaltak száma D_i, az e korcsoport évközepi népessége pedig P_i. A halálozási valószínűséget az $m_i = \frac{D_i}{P_i}$ korspecifikus halálozási arányszámokból a

$$q_i = n_i \frac{m_i}{1+\frac{n_i}{2}m_i}$$

képlettel – ahol n_i az i-edik intervallumhoz tarozó korévek száma – kapjuk. A q_i valószínűség most az i-edik korcsoportban, azaz n_i év alatti halálozás valószínűségét jelenti az intervallum kezdetének megfelelő életkor elérését feltéve. A halálozási tábla az alábbiak szerint konstruálható:

$$l_1 = 100\,000\ ,\ l_i = 100\,000\prod_{j=1}^{i-1}\left(1-q_j\right)\quad (i = 2, 3, \ldots, 19).$$

A stacioner népességre az l_i továbbélési függvényt integrálva $L_1 = 0{,}3l_1 + 0{,}7l_2$, mert csecsemőkorban a halandóság intenzitása a születést követő négy hét viszonylag magas perinatális halandóságának szintjéről gyorsan csökken, s ezért a stacionárius népesség közelebb kerül az egyéves korig továbbélők számához. A felső nyitott intervallumra $L_{19} = \frac{l_{19}}{m_{19}}$, és egyébként $L_i = \frac{n_i}{2}\left(l_i + l_{i+1}\right)$.

Végül a várható élettartamra az integrált numerikusan közelítve a következő formulát kapjuk:

$$e_i^0 = \frac{1}{l_i}\sum_{j=i}^{19} L_j .$$

A koréves halandósági táblákat ma is lényegében a *Pallós E.* által a múlt század közepén kidolgozott módszer szerint számoljuk. A nyers továbbélési valószínűségek becslésénél azonban lényeges változás volt a *Beckner–Zeuner*-formuláról a *Böckh*-formulára való áttérés, ami lehet

$$p_0 = \frac{B - D_0'}{B}\frac{P_0 - D_0''}{P_0} \text{ és } p_x = \frac{P_{x-1} - D_{x-1}'' - D_x'}{P_{x-1} - D_{x-1}''}\frac{P_x - D_x''}{P_x}.$$

A nyers halandósági valószínűség pedig: $q_x = 1 - p_x$.

Kiegyenlítési eljárások

Az időskori halandóságra nagyon megbízhatatlan becsléseket szolgáltatnak a kis populációkból becsült nyers halandósági valószínűségek. Javítható a helyzet, ha egy megfelelően választott eloszláscsaládban keressük az idős korban hátralevő élettartam eloszlását. Szokásos feltevés, hogy ez a Gompertz–Makeham-eloszlás. Ehhez 76 éves kor fölött az éves továbbélési valószínűségre

$$\overline{p}_x = e^{a+bc^x}$$

alakú függvényt illesztünk. A c paramétert a következő alakban becsüljük:

$$c = \sqrt[5]{\frac{H_3 - H_2}{H_2 - H_1}}, \quad H_k = \sum_{i=0}^{4} \ln p_{76+5(k-1)+i}.$$

Az a és a b paramétereket a legkisebb négyzetek módszerével becsüljük. Ahol nincs ilyen többletinformációnk, ott a szokásos kiegyenlítési eljárást alkalmazunk. Halandósági tábláink 15 és 75 év között Karup–King-interpolációt alkalmaznak. Legyen

$$Z_x = \frac{\sum_{i=-2}^{2} q_{x+i}}{5}.$$

A kiegyenlített valószínűségeket a

$$\overline{q}_x = \sum_{j=1}^{6} \alpha_{nj} Z_{x+5(j-3)} \quad (x = 15, 20, ..., 70, n \le 4)$$

képlet adja, ahol α_{nj} együtthatók a következő mátrixból olvashatók ki:

$$\begin{bmatrix} 0 & -0{,}04000 & 1{,}08000 & -0{,}04000 & 0 & 0 \\ 0{,}00256 & -0{,}10560 & 0{,}98080 & 0{,}14560 & -0{,}02400 & 0{,}00064 \\ 0{,}00288 & -0{,}10560 & 0{,}73760 & 0{,}43200 & -0{,}06880 & 0{,}00192 \\ 0{,}00192 & -0{,}06880 & 0{,}43200 & 0{,}73760 & -0{,}10560 & 0{,}00288 \\ 0{,}00064 & -0{,}02400 & 0{,}14560 & 0{,}98080 & -0{,}10560 & 0{,}00256 \end{bmatrix}$$

Az aktív népesség halandósága

A munkaügyi statisztikának fontos kategóriája az aktív népesség. Ezért is érdemes külön foglalkozni az aktív népesség halandóságával, s bemutatni az ennek tanulmányozására alkalmas módszert. Az ideális a *multistate life-table* módszerek alkalmazása lenne. Ehhez a jelenséget modellező Markov-folyamat valamennyi átmenet-valószínűségét meg kellene becsülnünk. A rendelkezésre álló adatok azonban ezt nem teszik lehetővé, de ahhoz elegendők, hogy az aktív népesség koréves elhalálozási valószínűségeit meghatározzuk.

A munkaerő-statisztika általános gyakorlata szerint 75 éves korig beszélünk gazdasági aktivitásról, e fölött az aktivitás megszűnik tömegjelenségnek lenni. Az aktív népesség halandósági valószínűségei pedig csak a nyugdíjkorhatárig megbízhatók.

A 2001. évi országos halandósági táblák adatain kívül az aktív népesség koreloszlását a 2001. évi statisztikai és demográfiai évkönyv adataiból, az aktív népesség korspecifikus halálozási adatait pedig regisztrációs adatokból számolhatjuk.

A korcsoportonkénti arányokat, amelyeket w_x-szel jelölünk, az 1. táblában mutatjuk be, az *x* éves korú népesség évközepi létszámát (jelölése P_x) pedig a 2. tábla tartalmazza. Az *x* éves aktív népesség létszáma (lásd a 3. táblát) az év folyamán átlagosan $\widetilde{P}_x = w_x P_x$. (A 3. tábla Együtt oszlopának az összegtől való eltérése az alkalmazott becslési eljárásból ered.) Az arányok 5 éves korcsoportokra vonatkoznak, de 5 éves korcsoporton belüli változásuk általában elhanyagolható. Az év folyamán *x* évesen elhalálozó aktívak száma (lásd a 4. táblát) $\tilde{D}_x$ $(15 \le x \le 74)$.

1. tábla

A 15–74 éves korú népesség korcsoportonkénti aránya

Korcsoport (éves)	Férfi	Nő	Együtt
	százalék		
15–19	11,34	8,00	9,71
20–24	64,37	47,86	56,29
25–29	89,69	61,11	75,69
30–39	90,12	69,91	80,15
40–54	78,51	73,20	75,77
55–59	53,45	23,85	37,47
60–74	7,12	2,83	4,58
15–74	61,72	45,55	53,31

Az aktív népesség elhalálozási valószínűségeinek számítása során először a halálozási arányszámokat (lásd az 5. táblát) becsüljük $\widetilde{m}_x = \widetilde{D}_x \big/ \widetilde{P}_x$ összefüggéssel, majd az aktívak elhalálozási valószínűségeire a $\widetilde{q}_x = \widetilde{m}_x \big/ 1 + 1/2\ \widetilde{m}_x$ számításával nyers becslést adunk. (Lásd a 6. táblát.) A halálozási valószínűségek kiegyenlítésére mozgóátlagos simítási eljárást alkalmazunk. (Lásd az 5. ábrát.)

A kiegyenlített elhalálozási valószínűségeket (lásd a 7. táblát) *Greville* harmadfokú, kilenc tagú kiegyenlítési módszerével nyerjük. A 6. ábrán összehasonlítjuk az aktív népesség elhalálozási valószínűségeit Magyarország népességének elhalálozási valószínűségeivel, amit a 8. tábla mutat be.

2. tábla

A 2001. évi évközepi népesség korévenként

Korév	Férfi	Nő	Együtt
	fő		
15	66852,5	64648,0	131500,5
16	66524,5	64356,0	130880,5
17	65290,0	63341,5	128631,5
18	67326,0	64487,5	131813,5
19	71339,0	67603,5	138942,5
20	75249,5	71502,5	146752,0
21	78903,5	74741,5	153645,0
22	82064,5	77743,0	159807,5
23	84434,5	80857,5	165292,0
24	87464,0	83788,0	171252,0
25	90839,5	86928,0	177767,5
26	90183,0	86921,0	177104,0
27	80977,5	78295,0	159272,5
28	73782,5	71307,5	145090,0
29	72714,5	70224,0	142938,5
30	72958,0	70496,0	143454,0
31	73677,0	71222,5	144899,5
32	73321,5	71287,0	144608,5
33	71858,0	70340,0	142198,0
34	67282,5	65952,0	133234,5
35	63282,0	62223,0	125505,0
36	61593,5	60971,5	122565,0
37	60669,5	60664,5	121334,0
38	59613,0	60182,5	119795,5
39	60601,0	61475,0	122076,0
40	64143,0	65327,5	129470,5
41	65314,5	67315,5	132630,0
42	66508,5	68972,5	135481,0
43	69279,0	71957,5	141236,5
44	75107,0	78531,5	153638,5
45	82484,0	86658,5	169142,5
46	87353,0	91565,0	178918,0
47	85022,5	89737,0	174759,5
48	76113,0	81745,0	157858,0
49	71492,5	78112,5	149605,0
50	72816,5	79292,0	152108,5
51	71793,5	78081,5	149875,0
52	68564,5	75642,0	144206,5
53	66154,0	73492,5	139646,5
54	60315,0	67560,5	127875,5
55	55231,5	63027,0	118258,5
56	57649,5	66874,0	124523,5
57	58206,0	68060,5	126266,5
58	55547,0	66400,0	121947,0
59	53228,0	65136,0	118364,0
60	51275,0	63981,0	115256,0
61	49109,0	63001,5	112110,5
62	45627,5	60717,5	106345,0
63	43527,5	59766,5	103294,0
64	41392,0	58505,0	99897,0
65	40898,0	58048,0	98946,0
66	41120,5	57625,0	98745,5
67	40635,5	57470,0	98105,5
68	39763,0	57697,0	97460,0
69	38272,0	56650,0	94922,0
70	37801,0	56700,0	94501,0
71	36393,5	55717,0	92110,5
72	33655,5	53559,5	87215,0
73	31157,5	51374,0	82531,5
74	28960,0	49714,0	78674,0

3. tábla

A 2001. évi becsült aktív népesség korévenként

Korév	Férfi	Nő	Együtt
	fő		
15	7583,2	5170,1	12765,6
16	7546,0	5146,8	12705,4
17	7406,0	5065,6	12487,1
18	7636,9	5157,3	12796,0
19	8092,1	5406,5	13488,0
20	48434,4	34221,1	82600,0
21	50786,3	35771,3	86479,8
22	52820,8	37207,8	89948,3
23	54346,3	38698,4	93035,3
24	56296,2	40101,0	96389,9
25	81472,8	53125,1	134549,4
26	80884,0	53120,8	134047,2
27	72627,7	47849,1	120550,8
28	66174,6	43578,8	109816,3
29	65216,7	42916,6	108187,9
30	65750,7	49283,8	114975,3
31	66398,7	49791,7	116133,8
32	66078,3	49836,8	115900,6
33	64759,4	49174,8	113968,7
34	60635,9	46107,1	106784,6
35	57030,6	43500,2	100589,6
36	55508,9	42625,2	98233,2
37	54676,2	42410,6	97246,6
38	53724,1	42073,7	96013,5
39	54614,5	42977,2	97841,3
40	50357,5	47820,3	98102,2
41	51277,2	49275,5	100496,2
42	52214,6	50488,5	102656,4
43	54389,7	52673,5	107017,5
44	58965,1	57485,7	116414,7
45	64756,7	63434,8	128162,4
46	68579,2	67026,4	135569,5
47	66749,6	65688,3	132418,5
48	59754,9	59838,0	119611,9
49	56127,4	57179,0	113358,5
50	57166,9	58042,4	115255,4
51	56363,7	57156,3	113563,0
52	53828,7	55370,6	109267,9
53	51936,3	53797,1	105812,7
54	47352,2	49454,9	96893,6
55	29520,3	15033,4	44315,8
56	30812,7	15951,0	46663,5
57	31110,1	16234,1	47316,7
58	29688,9	15838,0	45698,0
59	28449,4	15536,5	44355,4
60	3651,4	1812,0	5275,0
61	3497,2	1784,2	5131,0
62	3249,2	1719,5	4867,1
63	3099,7	1692,6	4727,5
64	2947,6	1656,9	4572,0
65	2912,4	1643,9	4528,5
66	2928,3	1632,0	4519,3
67	2893,8	1627,6	4490,0
68	2831,6	1634,0	4460,5
69	2725,4	1604,3	4344,3
70	2691,9	1605,8	4325,1
71	2591,7	1577,9	4215,6
72	2396,7	1516,8	3991,6
73	2218,8	1454,9	3777,2
74	2062,3	1407,9	3600,7

4. tábla

Az aktív népesség 2001. évi halálozása

Korév	Férfi	Nő	Együtt
	elhaltak száma (fő)		
15	0	0	0
16	1	0	1
17	3	1	4
18	6	6	12
19	24	5	29
20	45	4	49
21	39	4	43
22	48	7	55
23	41	13	54
24	66	21	87
25	56	17	73
26	52	19	71
27	81	16	97
28	57	17	74
29	59	23	82
30	81	22	103
31	81	16	97
32	85	25	110
33	68	25	93
34	106	20	126
35	99	30	129
36	82	31	113
37	90	45	135
38	152	46	198
39	157	45	202
40	230	48	278
41	225	88	313
42	242	96	338
43	293	87	380
44	314	91	405
45	422	123	545
46	421	169	590
47	464	140	604
48	411	158	569
49	405	143	548
50	425	167	592
51	473	168	641
52	420	139	559
53	379	129	508
54	373	95	468
55	308	80	388
56	383	51	434
57	319	46	365
58	279	45	324
59	268	25	293
60	123	27	150
61	74	22	96
62	53	14	67
63	45	16	61
64	47	24	71
65	38	13	51
66	36	15	51
67	40	17	57
68	32	24	56
69	36	18	54
70	50	22	72
71	37	20	57
72	34	17	51
73	36	18	54
74	33	25	58

5. tábla

Az aktív népesség 2001. évi halálozási aránya

Korév	Férfi	Nő	Együtt
	halálozás százezer főre		
15	0,0	0,0	0,0
16	13,3	0,0	7,9
17	40,5	19,7	32,0
18	78,6	116,3	93,8
19	296,6	92,5	215,0
20	92,9	11,7	59,3
21	76,8	11,2	49,7
22	90,9	18,8	61,1
23	75,4	33,6	58,0
24	117,2	52,4	90,3
25	68,7	32,0	54,3
26	64,3	35,8	53,0
27	111,5	33,4	80,5
28	86,1	39,0	67,4
29	90,5	53,6	75,8
30	123,2	44,6	89,6
31	122,0	32,1	83,5
32	128,6	50,2	94,9
33	105,0	50,8	81,6
34	174,8	43,4	118,0
35	173,6	69,0	128,2
36	147,7	72,7	115,0
37	164,6	106,1	138,8
38	282,9	109,3	206,2
39	287,5	104,7	206,5
40	456,7	100,4	283,4
41	438,8	178,6	311,5
42	463,5	190,1	329,3
43	538,7	165,2	355,1
44	532,5	158,3	347,9
45	651,7	193,9	425,2
46	613,9	252,1	435,2
47	695,1	213,1	456,1
48	687,8	264,0	475,7
49	721,6	250,1	483,4
50	743,4	287,7	513,6
51	839,2	293,9	564,4
52	780,3	251,0	511,6
53	729,7	239,8	480,1
54	787,7	192,1	483,0
55	1043,4	532,1	875,5
56	1243,0	319,7	930,1
57	1025,4	283,4	771,4
58	939,7	284,1	709,0
59	942,0	160,9	660,6
60	3368,6	1490,1	2843,6
61	2116,0	1233,0	1871,0
62	1631,1	814,2	1376,6
63	1451,8	945,3	1290,3
64	1594,5	1448,5	1552,9
65	1304,7	790,8	1126,2
66	1229,4	919,1	1128,5
67	1382,3	1044,5	1269,5
68	1130,1	1468,8	1255,5
69	1320,9	1122,0	1243,0
70	1857,4	1370,1	1664,7
71	1427,7	1267,5	1352,1
72	1418,6	1120,8	1277,7
73	1622,5	1237,2	1429,6
74	1600,1	1775,7	1610,8

6. tábla

Az aktív népesség 2001. évi nyers elhalálozási valószínűségei

Korév	Férfi	Nő	Együtt
15	0,00000	0,00000	0,00000
16	0,00013	0,00000	0,00008
17	0,00040	0,00020	0,00032
18	0,00079	0,00116	0,00094
19	0,00296	0,00092	0,00215
20	0,00093	0,00012	0,00059
21	0,00077	0,00011	0,00050
22	0,00091	0,00019	0,00061
23	0,00075	0,00034	0,00058
24	0,00117	0,00052	0,00090
25	0,00069	0,00032	0,00054
26	0,00064	0,00036	0,00053
27	0,00111	0,00033	0,00080
28	0,00086	0,00039	0,00067
29	0,00090	0,00054	0,00076
30	0,00123	0,00045	0,00090
31	0,00122	0,00032	0,00083
32	0,00129	0,00050	0,00095
33	0,00105	0,00051	0,00082
34	0,00175	0,00043	0,00118
35	0,00173	0,00069	0,00128
36	0,00148	0,00073	0,00115
37	0,00164	0,00106	0,00139
38	0,00283	0,00109	0,00206
39	0,00287	0,00105	0,00206
40	0,00456	0,00100	0,00283
41	0,00438	0,00178	0,00311
42	0,00462	0,00190	0,00329
43	0,00537	0,00165	0,00354
44	0,00531	0,00158	0,00347
45	0,00650	0,00194	0,00424
46	0,00612	0,00252	0,00434
47	0,00693	0,00213	0,00455
48	0,00685	0,00264	0,00475
49	0,00719	0,00250	0,00482
50	0,00741	0,00287	0,00512
51	0,00836	0,00293	0,00563
52	0,00777	0,00251	0,00510
53	0,00727	0,00240	0,00479
54	0,00785	0,00192	0,00482
55	0,01038	0,00531	0,00872
56	0,01235	0,00319	0,00926
57	0,01020	0,00283	0,00768
58	0,00935	0,00284	0,00706
59	0,00938	0,00161	0,00658
60	0,03313	0,01479	0,02804
61	0,02094	0,01225	0,01854
62	0,01618	0,00811	0,01367
63	0,01441	0,00941	0,01282
64	0,01582	0,01438	0,01541
65	0,01296	0,00788	0,01120
66	0,01222	0,00915	0,01122
67	0,01373	0,01039	0,01261
68	0,01124	0,01458	0,01248
69	0,01312	0,01116	0,01235
70	0,01840	0,01361	0,01651
71	0,01418	0,01260	0,01343
72	0,01409	0,01115	0,01270
73	0,01609	0,01230	0,01419
74	0,01587	0,01760	0,01598

7. tábla

Az aktív népesség 2001. évi kiegyenlített elhalálozási valószínűségei

Korév	Férfi	Nő	Együtt
16	0,00018	0,00017	0,00018
17	0,00071	0,0005	0,00062
18	0,00125	0,0007	0,00103
19	0,00154	0,00067	0,00119
20	0,00144	0,00045	0,00104
21	0,00112	0,00023	0,00076
22	0,00086	0,00018	0,00058
23	0,0008	0,0003	0,00059
24	0,00086	0,00039	0,00067
25	0,00085	0,00039	0,00066
26	0,00083	0,00037	0,00065
27	0,00085	0,00038	0,00067
28	0,00093	0,00041	0,00072
29	0,00104	0,00044	0,00079
30	0,00111	0,00044	0,00083
31	0,00116	0,00043	0,00085
32	0,00126	0,00043	0,00091
33	0,00138	0,00046	0,00098
34	0,00145	0,00053	0,00106
35	0,00155	0,00065	0,00116
36	0,00165	0,00081	0,00129
37	0,00195	0,00093	0,00151
38	0,00253	0,00101	0,00185
39	0,00328	0,00112	0,00228
40	0,00398	0,00132	0,00271
41	0,00446	0,00154	0,00304
42	0,00484	0,00167	0,00329
43	0,00521	0,00175	0,00351
44	0,00562	0,00182	0,00375
45	0,00607	0,00196	0,00405
46	0,00643	0,00218	0,00433
47	0,00669	0,00237	0,00455
48	0,00696	0,00253	0,00474
49	0,0073	0,00267	0,00497
50	0,00762	0,00278	0,00518
51	0,00768	0,00264	0,00509
52	0,00759	0,0025	0,00494
53	0,00789	0,00267	0,00528
54	0,00882	0,00307	0,00627
55	0,01	0,0035	0,0075
56	0,00978	0,00305	0,00738
57	0,00995	0,0026	0,00743
58	0,01242	0,00367	0,00954
59	0,01683	0,00631	0,01354
60	0,02069	0,00905	0,01723
61	0,0217	0,01086	0,01856
62	0,01948	0,01133	0,01711
63	0,01593	0,01077	0,01435
64	0,01375	0,00999	0,0125
65	0,01344	0,01005	0,0123
66	0,01269	0,01024	0,01189
67	0,01212	0,01081	0,01172
68	0,01254	0,01189	0,01233
69	0,01431	0,0129	0,01375
70	0,01716	0,01327	0,0156

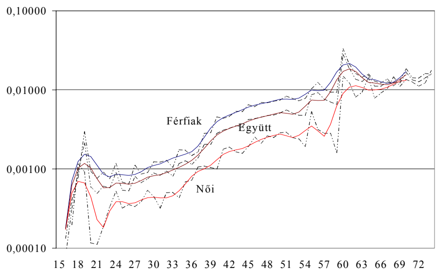
8. tábla

Magyarország népességének elhalálozási valószínűségei
a 2001. évi halandósági táblák szerint

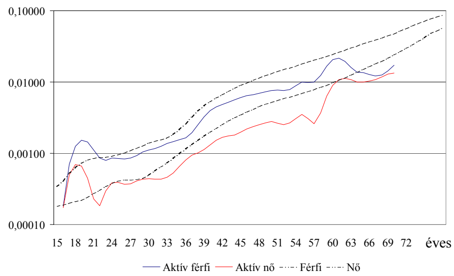
Korév	Férfi	Nő	Korév	Férfi	Nő
0	0,00870	0,00752	50	0,01319	0,00525
1	0,00056	0,00041	51	0,01407	0,00558
2	0,00037	0,00024	52	0,01496	0,00588
3	0,00036	0,00019	53	0,01587	0,00619
4	0,00021	0,00015	54	0,01685	0,00653
5	0,00021	0,00016	55	0,01793	0,00694
6	0,00018	0,00013	56	0,01908	0,00740
7	0,00016	0,00011	57	0,02029	0,00788
8	0,00015	0,00010	58	0,02158	0,00842
9	0,00017	0,00011	59	0,02300	0,00905
10	0,00021	0,00014	60	0,02457	0,00979
11	0,00026	0,00017	61	0,02630	0,01063
12	0,00029	0,00020	62	0,02816	0,01154
13	0,00029	0,00018	63	0,03015	0,01255
14	0,00021	0,00008	64	0,03228	0,01371
15	0,00034	0,00018	65	0,03454	0,01503
16	0,00041	0,00019	66	0,03683	0,01645
17	0,00052	0,00020	67	0,03914	0,01794
18	0,00063	0,00021	68	0,04164	0,01962
19	0,00073	0,00022	69	0,04450	0,02160
20	0,00081	0,00024	70	0,04789	0,02401
21	0,00085	0,00027	71	0,05188	0,02678
22	0,00088	0,00030	72	0,05635	0,02984
23	0,00089	0,00034	73	0,06121	0,03328
24	0,00092	0,00038	74	0,06634	0,03717
25	0,00096	0,00041	75	0,07164	0,04160
26	0,00102	0,00042	76	0,07762	0,04831
27	0,00110	0,00042	77	0,08195	0,05242
28	0,00118	0,00043	78	0,08699	0,05723
29	0,00128	0,00045	79	0,09286	0,06285
30	0,00139	0,00049	80	0,09967	0,06943
31	0,00148	0,00056	81	0,10757	0,07712
32	0,00155	0,00064	82	0,11673	0,08608
33	0,00165	0,00073	83	0,12733	0,09652
34	0,00183	0,00085	84	0,13957	0,10864
35	0,00214	0,00099	85	0,15367	0,12270
36	0,00260	0,00115	86	0,16987	0,13896
37	0,00320	0,00132	87	0,18844	0,15772
38	0,00388	0,00151	88	0,20964	0,17926
39	0,00459	0,00173	89	0,23374	0,20390
40	0,00529	0,00197	90	0,26100	0,23196
41	0,00598	0,00223	91	0,29167	0,26371
42	0,00669	0,00252	92	0,32594	0,29940
43	0,00741	0,00283	93	0,36394	0,33918
44	0,00817	0,00315	94	0,40569	0,38312
45	0,00894	0,00348	95	0,45107	0,43109
46	0,00974	0,00382	96	0,49978	0,48279
47	0,01057	0,00417	97	0,55132	0,53764
48	0,01143	0,00454	98	0,60492	0,59478
49	0,01230	0,00490	99	0,65956	0,65304
50	0,01319	0,00525	100	0,71397	0,71097

Az aktív népesség elhalálozási valószínűségei görbéjének kanyarulatai jobbára maguktól értetődők, például a legfiatalabb korcsoportban a kedvezőtlenebb szociális körülmények között nevelkedett viszonylag magasabb halandóságú réteg helyezkedik el, majd az értelmiségi fiatalok munkába állásával az aktívak halandósága a halandóság természetes tendenciájával szemben csökkenni kezd.

5. ábra. A halálozási valószínűségek kiegyenlítése



6. ábra. A népesség és az aktív népesség halandósága



Az elvesztett potenciális élettartam

Az élettartamra vonatkozólag a halandósági táblákon kívül számos egyéb statisztika ismeretes. Az egyik legfontosabb az elvesztett potenciális élettartamra vonatkozó. Ennek tárgyalásához előrebocsátjuk a standardizálás egy kellően általános definícióját. A standardizálás – akárcsak a standardizált halálozási arányszámok számításánál – az elvesztett potenciális élettartam viszonylatában is a vizsgált jelenség szempontjából nem lényeges hatások kiszűrésével hasznos eszköznek bizonyul.

Standardizálást olyan $(\mathbf{n},\mathbf{r})$ vektorpárokkal jellemezhető struktúrákra alkalmazunk, amelyekre $n_i \geq 0 \quad (i=1,\ldots,k)$ a struktúra i-edik kategóriájának a mérete (létszáma), r_i pedig egy mutatónak az i-edik kategóriára vonatkozó értéke. Értelmezzünk egy F függvényt az

$$F\left((\mathbf{n},\mathbf{r}),(\mathbf{n}',\mathbf{r}')\right)=\frac{\sum_{i=1}^{k} r_i n'_i}{\sum_{i=1}^{k} n'_i}$$

képlettel. Ha most $(\mathbf{n}^0,\mathbf{r}^0)$ a vizsgált, $(\mathbf{n}^s,\mathbf{r}^s)$ pedig a standard struktúra, akkor az $F\left((\mathbf{n}^0,\mathbf{r}^0),(\mathbf{n}^s,\mathbf{r}^s)\right)$ értéket a mutató direkt, míg az $F\left((\mathbf{n}^s,\mathbf{r}^s),(\mathbf{n}^0,\mathbf{r}^0)\right)$ értéket indirekt standardizáltjának nevezzük. A tényleges összetételt tükröző $F\left((\mathbf{n}^0,\mathbf{r}^0),(\mathbf{n}^0,\mathbf{r}^0)\right)$ súlyozott átlagot a standardizált mutatóval szembeállítva a „tényleges” jelzővel illetjük.

Legyen PYLL (Potential Years of Life Lost) egy meghalt által a [0 év, 70 év] potenciális élettartamból le nem élt évek száma. Valamely népességcsoport meghaltjainak öszszességére ezt a mennyiséget a

$$PYLL=\sum_i R_i D_i$$

formulával becsüljük, ahol D_i az *i*-edik korcsoport meghaltjainak száma, y_i az *i*-edik korcsoport meghaltjainak átlagos kora és $R_i = \max(70 - y_i, 0)$ az *i*-edik korcsoportban bekövetkezett halálozással vesztett évek átlagos száma. Feltéve, hogy a halálozások a korcsoporton belül egyenletesen oszlanak el, y_i éppen az *i*-edik korcsoportot felező életkor.

Az élettartam-veszteség *i*-edik korcsoportra vonatkozó korspecifikus rátája

$$\lambda_i = R_i D_i / P_i \ ,$$

ahol P_i az évközepi népesség. A 70 év feletti korcsoportokra ez 0. A demográfiai évkönyv az elvesztett lehetséges élettartamot mint az érintett (70 év alatti) népesség százezer főjére vonatkoztatott tényleges és standardizált rátáit közli, a standardizálást a WHO standard európai népességének korösszetétele szerint végezve.

IRODALOM

BENJAMIN, B. – HAYCOCKS, H. W. [1970]: *Analysis of mortality and other actuarial statistics*. Cambridge University Press, London.

BENJAMIN, B. – POLLARD, J. H. [1980]: *The analysis of mortality and other actuarial statistics*. Heinemann, London.

CHIANG, L. C. [1968]: *Introduction to stochastic processes in biostatistics*. Wiley, New York.

HOEM, J. M. – LINNEMANN, P. [1987]: The tails in moving average graduation. *Stockholm Research Reports in Demography,* 37. köt. University of Stockholm.

KOPF, E. W. [1927]: The early histories of the annuity. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 13. évf. 28. sz. 225–266. old.

PALLÓS E. [1971]: *Magyarország halandósági táblái 1900/01-tól 1967/68-ig*. Népességtudományi Kutató Intézet Közleményei. Központi Statisztikai Hivatal, Budapest.

RINÁGEL J. [1981]: *Halandósági táblák elkészítésének matematikai és számítástechnikai megfontolásai*. Rendszerfejlesztési Közlemények. Központi Statisztikai Hivatal, Budapest.

SIBBETT, T. A. – HABERMAN, S. (szerk.) [1995]: *History of actuarial science*. Pickering & Chatto, London.

SUMMARY

The author presents various fields of the statistics of lifetime data on the basis of probability theory and mathematical statistics. From the theory of life-tables besides the detailed review of the life-table methodology applied at the Hungarian Central Statistical Office, the life-table of economically active population is also given a treatment. From the popular fields of lifetime statistics the assessment of potential life years lost is presented. The estimates are based on the data of the Hungarian Statistical Office published in the Statistical and Demographic Yearbooks.