

ROBERT F. ENGLE ÉS CLIVE W. J. GRANGER, A 2003. ÉVI KÖZGAZDASÁGI NOBEL-DÍJASOK

DARVAS ZSOLT

A Svéd Tudományos Akadémia a 2003. évi Nobel-díjak odaítélését két fő alkotással indokolta: Robert F. Engle esetén az időben változó volatilitás modellezésére kidolgozott ARCH-modellt, Clive W. J. Granger esetén a nem-stacionárius változók vizsgálatára vonatkozó kointegrációt. Tanulmányunkban bemutatjuk e két módszertan lényegét, főbb előzményeiket és utóéletüket, valamint egy-egy magyarországi alkalmazásukat. A cikk végén pedig röviden felsoroljuk a díjazottak további fontos hozzájárulásait az ökonometriához.

TÁRGYSZÓ: Nobel-díj. Kointegráció. Hibakorrekció. Autoregresszív feltételes heteroszkedaszticitás – ARCH.

A közgazdasági Nobel-díjat a svéd jegybank támogatásával 1969 óta ítélik oda.¹ Az elmúlt három és fél évtizedben a közgazdaságtudományokon belül rendkívül változatos szakterületek kiemelkedő képviselőinek adományozták (lásd Függelék). 2002-ben olyan kutatók kapták a díjat (*D. Kahneman* és *V. L. Smith*), akik a közgazdaságtan és a pszichológia határterületén alkottak kiemelkedőt. A 2003. évi díjazottak, az amerikai *Robert F. Engle* (New York University) és az angol származású *Clive W. J. Granger* (University of California, San Diego), viszont a közgazdaságtan kvantitatív módszereinek területén végeztek korszakalkotó kutatásokat.² A díjazottak az ökonometria (*Econometrics*) tudományterületén belül az idősorlemzés (*Time series analysis*) területén dolgoztak ki olyan módszereket, amelyek megreformálták mind az ökonometriaelméleti, mind pedig az alkalmazott gazdasági kutatások irányait, például a bankrendszer kockázatkezelési szabályozásában is szerepet kaptak.

Mint ismeretes, az ökonometria a közgazdaságtan, a matematika, és a statisztika tudományterületeinek ötvöződése. A tudományterületek összekapcsolódását a 2003. évi díjazottak tanulmányai kitűnően illusztrálják.³ Granger egyetemi tanulmányait matematika szakon végezte és doktori oklevélét statisztikából kapta, míg Engle fizikusként tanult és

¹ A díj hivatalos elnevezése a következő: „The Bank of Sweden Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel”. A díj történetéről lásd *Lindbeck* [2001].

² A két díjazott évtizedeken át ugyanazon a tanszéken dolgozott, hiszen *Engle* főmunkahelye 1975 és 1998 között szintén a University of California San Diego volt. Társ szerzőként 20 tudományos közleményt jelentettek meg együtt és társszerzőként két könyvet szerkesztettek.

³ Az életrajzi utalások forrásai: Engle, Robert F. honlapja: <http://pages.stern.nyu.edu/~rengle/>; Granger, Clive W. J. honlapja: <http://www.econ.ucsd.edu/~cgranger/>.

közgazdaságtanból doktorált. Az ökonometria multidiszciplináris jellegét az is jól szemlélteti, hogy számos itt kifejlesztett módszer más tudományágakban is használatos, például a társadalomtudományok közül a szociológiában vagy politológiában, de társadalomtudományokon kívül is minden olyan tudományágban felhasználhatók, ahol a megfigyelt adatok alapján adódik lehetőség következtetések levonására, mint például az orvostudományban.

A két díjazott az ökonometria elméleti területén, azaz a módszeralkotásban hozott létre maradandó eredményeket. Mindketten több száz tudományos cikket adtak közre különböző témakörökben, amelyek a legnevesebb lapokban is helyet kaptak. Granger például összesen mintegy 230 tudományos közleményt jelentetett meg, amelyből nyolc az *Econometrica* című és huszonhárom a *Journal of Econometrics* című lapokban jelent meg, hogy csak a két legnevesebb ökonometriai lapot említsük. Engle mintegy 150 tudományos közleményt mondhat magáénak, melyből az említett két vezető ökonometriai folyóirat 12, illetve 17 cikket közölt. A folyóiratcikkek mellett számos könyvet is írtak, illetve szerkesztettek. A különböző munkáik alapján a legidézettebb szerzők közé tartoznak. A rendkívül sokrétű tudományos teljesítmény mellett mindkettőjük nevéhez kapcsolható egy-egy kiemelkedő alkotás, melyet a Svéd Tudományos Akadémia kiemelt a díj odaítélésének indoklásaként. Az indoklás alapján Engle „a gazdasági idősorok időben változó volatilitását (ARCH) vizsgáló módszerekért”, míg Granger „a közös trendeket⁴ (kointegráció) követő gazdasági idősorokat vizsgáló módszerekért” kapta.⁵ Jelen áttekintés elsőként e két módszertan lényegét mutatja be és illusztrálja hazai adatokkal, majd pedig a díjazottak sokrétű, gazdag tevékenységének néhány további fontos eredményét vázolja fel.

CLIVE W. J. GRANGER ÉS A KOINTEGRÁCIÓ

A két Nobel-díjas munkásságának bemutatását az abc-sorrendtől eltérve Grangerrel kezdjük, részben, mert a kettőjük közötti nyolc év korkülönbség miatt Granger pályafutása korábban kezdődött, részben pedig azért, mert egyes, mindkét témakörnél használatos fogalom definiálása jobban kapcsolódik a kointegráció témaköréhez.

A kointegráció közgazdasági háttere

A kointegráció (*cointegration*) fogalmának bemutatását, amelyhez Clive W. J. Granger alapvető kutatásokkal járult hozzá, kezdjük talán egy szemléletes példával. Képzeljünk egy éppen táncolásba kezdő párt a táncteremben. Vajon a tánc elején meg tudjuk-e jósolni, hogy a terem melyik sarkánál fognak megállni a tánc befejezésekor? Erre valószínűleg nemleges a válaszunk, mert akár olyan mértékben is belefeledkezhetnek a táncolásba, hogy csak önfeledten bolyonganak a teremben. Azt viszont jól meg tudjuk jósolni, hogy ezt a bolyongást együtt végzik, tehát bárhol is kötnek ki a teremben, egymáshoz

⁴ Közös trendeken nem közös determinisztikus trendek értendők, hanem úgynevezett közös „sztochasztikus trendek”. A sztochasztikus trend fogalmának definiálására a 6. lábjegyzetben visszatérünk.

⁵ A nyolcvanas években kibontakozó kointegrációs technika hamar bekerült a hazai szakirodalomba is. Kovács [1989] például átfogó helyzetképet ad a különböző kointegrációs technikákról, Kőrösi *et al.* [1990] ökonometria könyvének 4. fejezete pedig didaktikusan mutatja be a módszertant. Az első hazai empirikus alkalmazások között Király [1989] a fogyasztást és a megtakarítást vizsgálta kointegrációs módszerekkel, Király–Kőrösi [1990] pedig a fogyasztás, lakásberuházás, és pénzkereslet összefüggéseit.

nagyjából olyan távolságban lesznek, mint a tánc elején voltak. A kointegráció szabatosan definiált ökonometriai fogalmának hétköznapi szinonimájaként használhatjuk a fenti „közös bolyongás” kifejezést.

A hetvenes években már egyre több kutató vizsgálta a gazdasági idősorok természetét, és rámutattak arra, hogy a gazdasági változók jelentős része nemstacionárius.⁶ Granger előtt hagyományos statisztikai-ökonometriai módszerekkel vizsgálták a nemstacionárius idősorokat is, az ő általa kidolgozott eszközök azonban alapvetően megváltoztatták ezen idősorok, azaz a gazdasági idősorok többségének elemzési kereteit. Bemutatta ugyanis, hogy egymástól függetlenül generált nem-stacionárius folyamatok egymásra vonatkozó regresszióiban, a szokásos hipotézisvizsgálati eszközök alapján, túl gyakran utasítjuk vissza a kapcsolat hiányának igaz nullhipotézisét. A kutatásainak továbbfejlesztésével jutott el a kointegráció fogalmához, amely azon a felismerésen alapul, hogy nemstacionárius idősorok meghatározott kombinációi viselkedhetnek stacionárius módon.

Mit is értünk kombináción? A kérdés megválaszolásához vegyünk ismét egy hétköznapi példát. Ha valaki befejezi tanulmányait és dolgozni kezd valamilyen kezdő fizetés ellenében, akkor ehhez a fizetéséhez igazítja a vásárlásait, például jövedelmének kilencven százalékát elfogyasztja és tíz százalékát félreteszi tartaléknak. Egy kezdő munkavállalónál nehezen jósolható meg, hogy milyen életpályát fog befutni: vajon idősebb korára egy vállalat igazgatója lesz-e nagy fizetéssel, netán egy középvezetői pozícióig jut közepes jövedelemmel, vagy esetleg éveken át a munkanélküliséget váltja rosszul fizetett állásokkal. Ezért azt mondjuk – amit adatokon végzett ökonometriai tesztek is alátámasztanak –, hogy a bérjévedelem nemstacionárius folyamatot követ, amelyet a táncospár végső helyzetéhez hasonlóan nehezen tudunk előre jelezni. Azt viszont jó eséllyel meg tudjuk jósolni, hogy az illető vásárlásai igazodni fognak jövedelméhez: vezérigazgatóként sokkal több dologra fog költeni, mint munkanélküliként, így a fentebb említett kombinációként gondolhatunk a vásárlásnak és a jövedelemnek a hányadosára.⁷

Természetesen nem ezért a kézenfekvő, korábban is számtalan kutató által tanulmányozott közgazdasági összefüggésért kapta Granger a Nobel-díjat, hanem annak az ökonometriai fogalomnak a megalkotásáért és a módszernek a kifejlesztéséért, amely a

⁶ Egy idősört gyengén stacionáriusnak nevezünk, ha várható értéke, varianciája, és autokovarianciái függetlenek az időponttól. Az erős stacionaritás pedig az egymást követő megfigyelések együttes valószínűség-eloszlásának időbeni állandóságát követeli meg. Egy idősornak egy konkrét dátumnál felvett értékére úgy tekintünk, mint az adott időponthoz tartozó eloszlás egy realizációja. Amennyiben az idősorunk stacionárius, akkor a különböző időpontbeli konkrét megfigyeléseket könnyen fel lehet használni az idősor eloszlásának becslésére. Nemstacionárius esetben azonban más a helyzet. A legegyszerűbb nemstacioner folyamat az (eltolás nélküli vagy eltolásos) véletlen bolyongás (*random walk with/without drift*), azaz (eltolás nélküli esetben) $y_t = y_{t-1} + u_t$, ahol $u_t \sim \text{FAE}(0, \sigma_u^2)$, és a kezdeti érték, y_0 , konstans vagy szintén valamely eloszlású változó. Könnyen belátható, hogy y_t a kezdeti érték plusz az innovációk (azaz az u_t -k) (súlyozatlan) összegével egyenlő, és ezért varianciája és autokovarianciái változnak, nevezetesen korlátlanul növekednek az időben. Mivel a folyamat alakulását nem a determinisztikus komponensek (például konstans vagy determinisztikus trend) dominálják, hanem a sztochasztikus sokkok, ezért időnként a „sztochasztikus trend” kifejezést használják a nemstacioner folyamat szinonimájaként. Részletesebben lásd: *Hunyadi* [1994] és *Neményi* [1994].

⁷ Néhány további példa a hazai szerzők publikációi közül az 5. lábjegyzetben említettek mellett: *Mellár-Rappai* [1998] a fogyasztóiár-index különböző komponensei között vizsgálják a kointegrációt. *Darvas* [2001b] a nominális árfolyamnak az árra gyakorolt hatását elemzi egy olyan modellben, amelyben a reálárfolyam egyensúlyi értékét makrogazdasági változók határozzák meg egy kointegrációs kapcsolat keretében, míg az árak rövid távú alakulására a reálárfolyamnak az egyensúlytól való eltérése – hibakorrekcióként – is hatást gyakorol. *Darvas-Simon* [2002] az egyensúlyi kibocsátási szint modellezésére állít fel kointegrációs-hibakorrekciós modellt. A modellkeretet *Várpalotai* [2003] az infláció előrejelzéséhez használja. A technika a különböző nominális kamatlábak közötti kapcsolat vizsgálatára is alkalmas, *Horváth et al.* [2004] például a jegybanki kamatoknak a piaci kamatokba való átgyűrűzését vizsgálják ilyen módszerekkel.

nemstacionárius idősorok kezelésére alkalmas. Mint Granger rámutatott, nemstacionárius változók esetén a hagyományos statisztikai-ökonometriai módszerek félrevezetőek lehetnek, ezért ha például két idősor között a hagyományos módszerek alapján kapcsolat látszik kirajzolódni, akkor nem lehetünk biztosak abban, hogy a felhasznált adataink valóban kapcsolatban állnak-e egymással, vagy pedig csak a módszernek köszönhető és így hamis az eredmény. Ha az eredmény valódinak bizonyul, akkor egy megfelelően specifikált modell segítségével a változóknak mind a hosszú távú együttmozgását (kointegráció), mind pedig a rövid távú mozgásaikat – melyekre a hosszú távú kapcsolattól való eltérés (hibakorrekciónak) is hatással van – jellemezni lehet, és akár előrejelzésre, akár különböző szimulációs vizsgálatokra fel lehet használni a modellt. Mivel a gazdasági idősorok jelentős része nemstacionárius, ezért a hetvenes-nyolcvanas évek fordulóján kifejlesztett új módszertan átütő hatást gyakorolt mind az elméleti, mind pedig az empirikus ökonometriai kutatásokra.⁸

A modell

A hatvanas-hetvenes években a gazdasági idősorok statisztikai-ökonometriai vizsgálataiban gyakran használták az egyszerű lineáris regressziós módszert vagy valamely szimultán becslőeljárást, és a legjobb esetben is mindössze egy determinisztikus trendet tettek az egyenletbe időben növekvő idősorok esetén. A becslést paramétereket vizsgáló hipotézisvizsgálatnál pedig a hagyományos eloszlások (például t - vagy F -eloszlás) voltak használatosak. Granger–Newbold [1974] tanulmánya azonban, amelyben egy számítógépes kísérlet eredményeit mutatták be, új megvilágításba helyezte a nemstacionárius változókra vonatkozó hipotézisvizsgálatot. Mesterségesen létrehozta nemstacionárius idősorokat olyan módon, hogy az őket létrehozó innovációk egymástól teljesen függetlenek voltak, azaz

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t-1} + u_t, & u_t &\sim \text{FAE}(0, \sigma_u^2) & /1/ \\ x_t &= x_{t-1} + v_t, & v_t &\sim \text{FAE}(0, \sigma_v^2) & /2/ \end{aligned}$$

$$E(u_t v_s) = 0 \quad \forall t, s; \quad E(u_t u_{t-k}) = E(v_t v_{t-k}) = 0 \quad \forall k \neq 0.$$

Így a két változó (egymással korrelálatlan innovációk nyomán kialakuló) véletlen bolyongás. Mivel egyik változó sincs hatással a másikra, az

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t \quad /3/$$

regresszióban azt várnánk, hogy β_1 valószínűségben konvergál nullához és a determinációs együttható (R^2) szintén nullához tart. Granger–Newbold Monte Carlo-vizsgálatokkal igazolták, hogy nemstacionárius változók esetén azonban nem ez a helyzet, hanem az igaz nullhipotézist a hagyományos tesztek gyakrabban fogják elvetni, (azaz hamis kap-

⁸ A kointegrációs technika az átfogó makromodelleket is alaposan megváltoztatta: manapság a becslést ökonometriai makromodellek többnyire kointegrációs-hibakorrekciónak egyenletekre épülnek. Lásd például *Jakab–Kovács* [2002]. A Magyar Nemzeti Bankban jelenleg készülő Negyedéves Előrejelző Modell (NEM) egyenletei is ezt a specifikációt követik, lásd *Jakab et al.* [2003].

csolatot kimutatni), mint amekkora a felhasznált szignifikanciaszint.⁹ Ezt a jelenséget *hamis regresszió*nak (*spurious regression*) nevezték el, amely a kointegráció fogalmának kifejtése terén tett első kiemelkedő lépés volt. Granger és Newbold szimulációs vizsgálatukkal azt is kimutatták, hogy amennyiben a Durbin–Watson-statisztika kisebb az R^2 -nél, akkor a regresszió nagy valószínűséggel hamis. A legfontosabb tanulság, amelyet a Granger–Newbold-tanulmány a felszínre tárt az, hogy a szokásos hipotézisvizsgálati eszközök nem alkalmazhatóak nemstacionárius folyamatoknál.

Granger professzor egyik előadásában erről az időszakról azt mesélte, hogy kollegái a London School of Economics-ban nem akartak hinni az eredményeinek, hanem azt gondolták, hogy a számítógép programozásában vétett valamilyen hibát. Ma már természetesen tudjuk, hogy igaza volt, és egy alapvető tudományterületnek fektette le az alapjait.

A hamis regresszió problémájának elkerülésére gyakran alkalmazták a növekményekre felírt regressziót, hiszen nemstacioner változók növekményei gyakran már stacionáriusok. Ez azonban nem feltétlenül helyes eljárás. Egyrészt, ha az adatok valójában stacionáriusak (például $I(1)$ -ben az autoregresszív paraméter nem 1, hanem mondjuk 0,9), akkor téves specifikációjú ez a regresszió. Másrészt, ha y_t és x_t *kointegrált folyamatot* (*cointegrated processes*) alkotnak, akkor téves specifikációjú a dinamikus kapcsolat felírására szolgáló egyenlet, ha egyszerűen csak a növekmények idősoraira vonatkozik (azaz Δy_t -re és Δx_t -re), és nem szerepel benne a későbbiekben bemutatandó hibakorrekciónak tag.¹⁰ Harmadrészt a közgazdasági elméletek általában a változók szintjére, és nem pedig a növekményekre fogalmazzak meg állításokat, ezért a szintek modellezése is elengedhetetlenül fontos.

Az integráció és a kointegráció fogalmait Granger [1981] definiálta. Egy x_t nemstacionárius folyamatot d -ed rendű integráltnak nevezünk és $I(d)$ -vel jelölünk, ha d -ik növekménye stacionárius (de a $d-1$ -ik növekménye még nem az)¹¹; a stacionárius változókat az $I(0)$ szimbólummal jelöljük. A legegyszerűbb esetet a véletlen bolyongás, azaz $x_t = x_{t-1} + v_t$ jelenti, ahol v_t stacionárius, azaz $x_t \sim I(1)$. Ekkor a növekmény:

$$\Delta x_t \equiv x_t - x_{t-1} = v_t \sim I(0).$$

A kointegráció kifejezés „közös integráltságra” utal. Formálisan, két idősort akkor nevezünk kointegráltnak, ha mindkettő azonos rendben integrált (például $I(1)$), de létezik egy olyan lineáris kombinációjuk, amely alacsonyabb rendben integrált (például stacionárius). Tekintsünk például egy egyszerű regressziót: $y_t = \beta x_t + u_t$, ahol legyen y_t és x_t $I(1)$. Ekkor u_t előállítható y_t és x_t lineáris kombinációjaként: $u_t = y_t - \beta x_t$, amely ha teljesíti a stacionaritás feltételeit, akkor y_t és x_t kointegráltak az $(1, -\beta)$ kointegráló vektorral.

⁹ A fenti példa két változója eltolás nélküli véletlen bolyongás, azaz időben nem növekvő folyamatok. Időben növekvő folyamatok esetén még könnyebben elképzelhető a hamis regresszió problémája. Képzünk el, például, hogy a cipőgyártás és a búzatermelés növekvő idősort alkotnak, mindkettő véletlenül ingadozik a saját növekedési üteme által meghatározott pályája körül. Ha regressziót illesztünk a két idősorra, akkor nagy valószínűséggel „jó” statisztikákat kapunk, hiszen egy időben növekvő idősort egy konstanssal magyarázva nagy valószínűséggel magasabb eltérés-négyzetösszegeket kapnánk, mint egy másik (bár tőle független) időben növekvő idősor lineáris kombinációjaként. Eredményül magas R^2 , F és t -hányadosértékeket kapunk annak ellenére, hogy elméletileg semmilyen oksági viszony sem állítható fel a két idősor között.

¹⁰ Igazolható, hogy kointegrált idősorok esetén nem létezik véges késleltetésű felírása a pusztán növekményeket tartalmazó modellnek.

¹¹ Granger [1981] mind az integráció, mind pedig a kointegráció fogalmát tört d -re is definiálta (egész számokon túlmenően), amelyet frakcionálisan integrált/kointegrált folyamatoknak nevezünk. A hazai szerzők közül például Hornok et al. [1999] tanulmányozták e folyamatok tulajdonságait.

Az általános definíció szerint két $I(d)$ ($d > 0$) idősort akkor nevezünk kointegráltnak, ha létezik olyan lineáris kombinációjuk, amely $I(d-b)$ ($d \geq b > 0$), azaz az integráltsági fok csökken. Mivel a legtöbb gazdasági idősor $I(1)$, ezért az első egyszerűbb definíciót szokás használni. Könnyen belátható, hogy kétváltozós esetben (a konstással való szorzástól eltekintve) maximum egy kointegráló vektor lehet, és általánosabban, n darab integrált változó között maximum $n-1$ egymástól lineárisan független kointegráló vektor lehet.¹²

A *Granger–Newbold* [1974] által bevezetett hamis regresszió ismertetésénél megemlítettük, hogy ha y_t és x_t azonos rendű integrált folyamatok és kointegráltak, akkor téves specifikációjú a dinamikus kapcsolat felírására szolgáló egyenlet, ha egyszerűen csak az idősorok növekményeire vonatkozik. Ennek oka az, hogy ha a változók kointegráltak és ezért létezik közöttük hosszú távú kapcsolat, akkor a változók rövid távú dinamikus alakulását befolyásolja a hosszú távú egyensúlytól való előző időszaki eltérés. Azaz a különbségekre felírt rövid távú dinamikus egyenletet ki kell egészíteni a hosszú távú kapcsolat hibátényezőjének késleltetett értékével. Ennek alapját Granger reprezentációs tétel adja. A tétel teljes kimondását és bizonyítását lásd például *Engle–Granger* [1987] 255–258. oldal. Itt csak a szintekre felírt vektor-autoregresszív (VAR) modell és a növekményekre felírt hibakorrekciós modell kapcsolatát vázoljuk (VECM). Tekintsük két változó p -ed rendű VAR reprezentációját:

$$\begin{aligned} y_t &= c_1 + \sum_{i=1}^p \gamma_{11,i} y_{t-i} + \sum_{i=1}^p \gamma_{12,i} x_{t-i} + \varepsilon_{1,t} \\ x_t &= c_2 + \sum_{i=1}^p \gamma_{21,i} y_{t-i} + \sum_{i=1}^p \gamma_{22,i} x_{t-i} + \varepsilon_{2,t} \end{aligned} \quad , \quad /4/$$

ahol $\varepsilon_{1,t}$ és $\varepsilon_{2,t}$ (potenciálisan korrelált) fehér zaj folyamatok. Ha mindkét változó $I(1)$ és kointegráltak, akkor a rendszer átírható az alábbi *vektor hibakorrekciós (vector error correction – VECM)* alakba:

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \xi_1 + \alpha_1 (y_{t-1} - \beta x_{t-1} - \delta) + \sum_{i=1}^{p-1} \xi_{11,i} \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^{p-1} \xi_{12,i} \Delta x_{t-i} + \varepsilon_{1,t} \\ \Delta x_t &= \xi_2 + \alpha_2 (y_{t-1} - \beta x_{t-1} - \delta) + \sum_{i=1}^{p-1} \xi_{21,i} \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^{p-1} \xi_{22,i} \Delta x_{t-i} + \varepsilon_{2,t} \end{aligned} \quad , \quad /5/$$

amelynél legalább az egyik α_i nem nulla.¹³ Az /5/ egyenlet mindkét oldalán azonos rendben integrált változók szerepelnek – ezért *kiegyensúlyozottnak (balanced)* hívjuk –, nevezetesen mindegyik változó stacionárius, hiszen a két folyamat kointegráltságából követke-

¹² A kointegráció értelmezhető olyan többváltozós modellben is, amelyben eltérő integráltságú változók is vannak. Egy példa: legyen három változónk, x_t és $y_t \sim I(2)$ és $z_t \sim I(1)$. Ha létezik két kointegráló vektor, hogy $w_t = x_t - \beta_1 y_t \sim I(1)$ és $z_t - \beta_2 w_t \sim I(0)$, akkor a három változó kointegrált.

¹³ A /5/ egyenletben azért szerepel két helyen is konstans (ξ_i és $\alpha_i \delta$), hogy a hibakorrekciós tag szemléletesen jelezze az egyensúlytól való eltérést, azaz a „hibát”, ugyanis egyensúlyhiányt akkor tudunk jól értelmezni, ha annak a várható értéke nulla. Természetesen, ha $y_{t-1} - \beta x_{t-1} - \delta \sim I(0)$, akkor $y_{t-1} - \beta x_{t-1} \sim I(0)$ is, és az /5/ egyenlet konstansai összevonhatók; viszont erre az összevont konstansra egy megfelelő megkötésnek kell teljesülnie ahhoz, hogy a változók valóban együtt haladjanak.

zik, hogy $y_{t-1} - \beta x_{t-1} - \delta \sim I(0)$, és a változók első rendű integráltságából az, hogy a növekmények stacionáriusak. Az /5/ egyenletet azért nevezik hibakorrekciós modellnek, mert az $y_{t-1} - \beta x_{t-1} - \delta$ kifejezés értéke éppen azt mutatja meg, hogy az $y_t = \delta + \beta x_t$ által megtestesített hosszú távú kapcsolattól az előző időszakban mekkora eltérés mutatkozott. Az /5/ egyenletben tehát az egyik változó megváltozása nemcsak a másik változó megváltozásától (például fogyasztás növekedésének nagysága nemcsak a jövedelem növekedésétől) és saját múltbeli növekményeitől függ, hanem az előző időszaki hiba nagyságától is (azaz attól, hogy az előző időszaki fogyasztásunk összhangban állt-e jövedelmünkkel).

A kointegrációs technika kidolgozásában talán a leggyakrabban hivatkozott cikkben Granger társszerzője az ideai másik Nobel-díjas, *Robert F. Engle* volt (lásd *Engle–Granger* [1987]), így sokszor „Engle–Granger-módszerként” utalnak a kointegráció tesztelésére és becslésére vonatkozó legalapvetőbb módszerre. Ennek két változata van: ha közgazdasági megfontolások alapján előre ismerjük a kointegráció vektort, illetve ha nem ismerjük és a mintából kell azt becsülni.

Elméleti megfontolások alapján gyakran *a priori* ismert a kointegráló vektor. Ha a vizsgált változók például egymás azonos arányai, amely logaritmizálás után azonos különbséget jelent,¹⁴ akkor a kointegráló vektor azonos abszolút értékű számokat tartalmaz. Például, (1,-1) a kointegráló vektor a (logaritmizált) fogyasztás és jövedelem, valamint a nominális kamatláb és az infláció esetén (reálkamatláb), vagy (1,-1,-1) a kointegráló vektor a (logaritmizált) belföldi árak, külföldi árak, és az árfolyam esetén (vásárlóerő-paritás). Ha ismert a kointegráló vektor, akkor egyrészt meg kell győződni arról, hogy a változók azonos rendben integráltak-e, és ha igen, akkor elő kell állítani ezek lineáris kombinációját, $z_t = \beta y_t$, és z_t stacionaritását kell megvizsgálni az erre vonatkozó módszerekkel.

Ha elméleti megfontolások alapján nem állapítható meg a kointegráló vektor, akkor a mintából kell becsülni azt az

$$y_{1t} = \beta_0 + \beta_1 y_{2t} + \beta_2 y_{3t} + \dots + \beta_{n-1} y_{nt} + u_t \quad /6/$$

egyenlet illesztésével. Engle és Granger bemutatták, hogy a kointegráló vektor becslése – ha fennáll a kointegráció – konzisztens még akkor is, ha u_t autokorrelált, vagy ha u_t korrelált $\Delta y_{2t}, \Delta y_{3t}, \dots, \Delta y_{nt}$ -vel. Sőt a konvergencia sebesség T , azaz gyorsabb, mint stacionárius változók közötti regressziós paramétereknél szokásos $T^{0.5}$, ezért a becslést szuperkonzisztensnek nevezik. (A gyorsabb konvergencia sebesség biztosítja a konzisztenciát az autokorrelált és a késleltetett növekményekkel való korreláció eseteire.)

A vizsgálat második lépése a hibakorrekciós modell becslése. Az eljárás alapját *Engle–Granger tétele* adja. A hosszú távú egyensúly és a hibakorrekciós modell kétlépéses becslése egy kointegráló vektor esetén, amelynél a hibakorrekciós modellben a becsült kointegráló vektor szerepel a tényleges vektor helyett, azonos határeloszlású azzal a maximum likelihood becsléssel, amely a tényleges vektort használja.

A kointegráció teszteléséhez az első lépésben becsült hibataragok stacionaritását kell tesztelni.¹⁵ Mivel itt mintából becsült reziduuumokat vizsgálunk, ezért az ezekre alkalma-

¹⁴ Például, ha C_t jelöli a fogyasztás és Y_t a jövedelem reálértékét valamely pénzegységben, és $C_t/Y_t = 0,9$, akkor logaritmizálás után $c_t - y_t = -0,105 (= \ln(0,9))$.

¹⁵ Pontosabban Engle–Granger hét lehetséges tesztstatisztikát vizsgáltak a kointegráció tesztelésére, de ezek közül a szimulációs vizsgálataik alapján a becsült hibataragokra illesztett kibővített Dickey–Fuller-féle teszttegyenlet nyújtotta a legkedvezőbb tulajdonságokat.

zott egységgyökteszteknek más lesz az eloszlása, mint amelyek megfigyelt idősorok esetén érvényesek. Például, a Dickey–Fuller-teszt esetén az eloszlás kritikus értékei függenek a változók számától és abszolút értékben magasabbak a Dickey–Fuller kritikus értéknél.

Előzmények és továbbfejlesztések

Az előzményeket, amelyek a hibakorrekciós modellre vonatkoznak, *Engle–Granger* [1987] is számba veszik. *Phillips* [1957] és *Sargan* [1964] már használtak hibakorrekciós modelleket, melyben azt feltételezték, hogy az egyensúlytalanság bizonyos hányada korrigálódik a következő periódusban. *Davidson–Hendry–Srba–Yeo* [1978] fogyasztási modelljében pedig a (logaritmizált) fogyasztás–jövedelem különbség késleltetett értéke, mint hibakorrekciós tényező, gyakorolt hatást a fogyasztás megváltozására.

Az idősorelemzés nagyarányú fejlődése is kedvező környezetet teremtett a további kutatásokhoz. *Box–Jenkins* [1970], *Fuller* [1976], *Dickey–Fuller* [1979], és *Nelson–Plosser* [1982], hogy csak néhány nevezetes művet emeljünk ki, mind a stacionárius, mind a nemstacionárius egyváltozós idősormodellek területén fontos eredményeket értek el és gyakran hivatkozott szerzőkké váltak.

A továbbfejlesztések egyik iránya a kointegráció–hibakorrekció kifejlesztése során Monte Carlo-szimulációkkal tanulmányozott eloszlások (például *Garnger–Newbold* [1974], *Engle–Granger* [1987]) analitikus levezetése. Ebben *Peter C. B. Phillips* játszott úttörő szerepet az úgynevezett *függvénytereken értelmezett központi határeloszlás tétel* (*functional central limit theorem*) és a *folytonos leképezési tétel* (*continuous mapping theorem*) alkalmazásával.¹⁶ Például a hamis regresszióval kapcsolatban *Phillips* [1986] kimutatta, hogy a $1/3$ -ban sem β_0 -nak, sem β_1 -nek nincsen t -eloszlása, nincsen semmilyen határeloszlása, sőt a mintaelemszám növekedésével divergálnak valószínűségben, ezért bármilyen rögzített kritikus érték esetén a nullhipotézis visszautasításai százaléka növekszik a mintaelemszám növekedésével. Ez másként fogalmazva azt jelenti, hogy „a nincs kapcsolat” nullhipotézis visszautasításának gyakorisága növekszik a mintaelemszám növekedésével, azaz úgy tűnhet, mintha a $1/3$ -as regressziónál y és x szignifikáns kapcsolatban állnának, holott a valóságban teljesen függetlenek. Az F teszt sem konvergál egy véges értékhez hamis regressziónál a mintaelemszám növelésével. *Phillips* elméleti tanulmánya azt is levezette, hogy hamis regresszió esetén a DW-statisztika nullához tart a mintaelemszám növekedésével, míg amikor a két változó valóban oksági kapcsolatban áll, akkor a DW egy pozitív értékhez konvergál. Így a DW-statisztika hasznos eszköz lehet a hamis regresszió felderítésében, azonban ennek a statisztikának rosszak a kisminta-tulajdonságai. A $DW < R^2$ hüvelykujjszabály így hasznos információt szolgáltat, kisminta esetén azonban célszerű ennek eredményét sejtésként kezelni, és más módszerekkel is tesztelni a regresszió valódiságát, illetve hamisságát.

A másik fő továbbfejlesztési irány a kointegrációra vonatkozó alternatív becslőfüggvények kidolgozása és azok statisztikai tulajdonságainak elemzése. Szinte megszámlálhatatlan az ezen irányba történt továbbfejlesztéseknek a száma. Ezek közül csak a leggyakrabban használt, *Johansen* [1988], [1991] által kifejlesztett FIML-becslést tekintjük át.

¹⁶ *Phillips* [1987] ezt a technikát alkalmazva analitikusan levezette egy nem-stacionárius változó autoregresszív modelljének különböző eloszlásait is, mint például a *Dickey–Fuller* által Monte Carlo-szimulációval előállított eloszlásokat.

Az Engle–Granger-módszer egyik problémája az volt, hogy érzékeny lehet a változók normalizálására, ugyanis a statikus hosszú távú regresszióban az egyik változó paraméterét 1-re kell normalizálni és azt az egyenlet bal oldalára helyezni. Másrészt, ha több mint két változó között keresünk hosszú távú kapcsolatokat, akkor több mint egy kointegráló vektor lehet közöttük, míg az egy egyenletes Engle–Granger-módszerrel csak egyet lehet megbecsülni.

Harmadrészt, bár a kointegráló vektor becslése szuperkonzisztens, az aszimptotikus eloszlása függ olyan zavaró paramétereiktől (*nuisance parameter*) amelyek az endogenitás és az autokorreláció folytán merül(het)nek fel. Végül, bár a kointegráló vektor becslése szuperkonzisztens, a kismintában igen jelentős torzítás lehetséges. Számos Monte Carlo-vizsgálat igazolta, hogy kisminták esetén kedvezőtlenek az Engle–Granger eljárás tulajdonságai. Ezen problémákra nyújt megoldást *Johansen* eljárása, amely a kointegráló vektorok által kifeszített teret becsli meg. Ennek a térnek a dimenziója a kointegráló vektorok számával egyenlő¹⁷, és azért az általuk kifeszített teret, és nem a vektorok kokrét paramétereit becsli, mivel azok több kointegráló vektor esetén (a skalárral való szorzáson túlmenően) nem egyértelműen meghatározottak, hiszen két (vagy több) kointegráló vektor lineáris kombinációja is kointegráló vektor.¹⁸

A Johansen-féle eljárás a VECM-reprezentáción alapul, azaz az /5/ egyenleten, melyet n változóra paramétermátrixokkal az alábbi formában írhatunk:

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}' \mathbf{y}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \boldsymbol{\Gamma}_i \Delta \mathbf{y}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad /7/$$

ahol \mathbf{y}_t $I(1)$ idősorokból álló $(n \times 1)$ -es vektor, $\boldsymbol{\gamma}$ a konstansok $(n \times 1)$ -es vektora, az $(r \times n)$ -es $\boldsymbol{\beta}'$ mátrix a kointegráló vektorok mátrixa (az általuk kifeszített tér bázisvektorai), azaz a mátrix sorai lineárisan függetlenek és a $\mathbf{z}_t = \boldsymbol{\beta}' \mathbf{y}_t$ $(r \times 1)$ -es vektor stacionárius, az $(n \times r)$ -es $\boldsymbol{\alpha}$ mátrix a hibakorrektációs paraméterek mátrixa, és $\boldsymbol{\Gamma}_i$ pedig $(n \times n)$ -es paramétermátrixokat jelöli. A számítások kezdetén természetesen nem tudjuk, hogy hány kointegráló vektor van, azaz nem tudjuk az $\boldsymbol{\alpha}$ és $\boldsymbol{\beta}'$ mátrixok dimenzióit. Korlátolatlan becsléskor csak a két mátrix szorzatát, azaz az $(n \times n)$ -es $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}'$ mátrixot becsüljük, és ennek a rangja határozza meg, hogy van-e és ha van, akkor hány kointegrációs kapcsolat a változók között. Ahhoz, hogy az egyenlet mindkét oldalán stacionárius változók álljanak, $\boldsymbol{\Pi}$ -nek nem lehet teljes rangja. Ha ugyanis teljes rangja lenne, akkor $\boldsymbol{\Pi} \mathbf{y}_{t-1}$ nem lenne stacionárius, ezért a Johansen által kifejlesztett teszteljárás elsőként e mátrix rangját vizsgálja, melyet követően különböző hipotézis-vizsgálatok végezhetők a modellben.

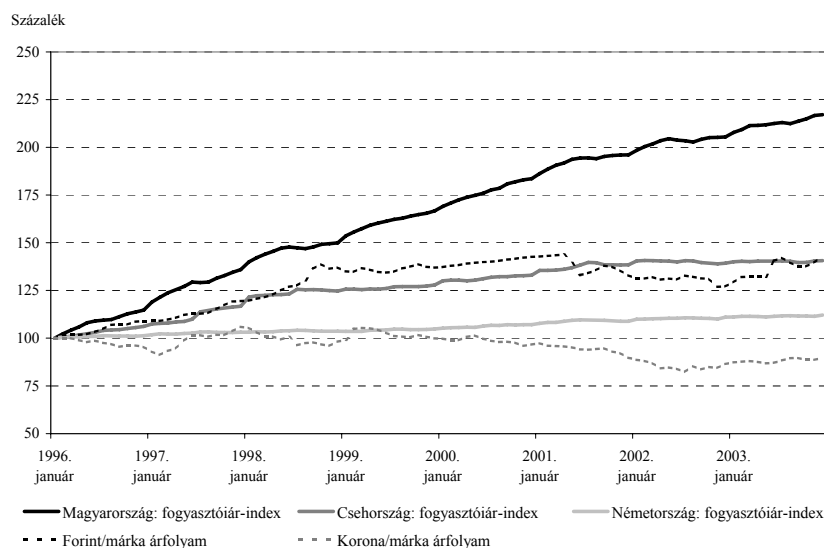
¹⁷ Mint említettük, n darab integrált változó között maximum $n-1$ egymástól lineárisan független kointegráló vektor lehet.

¹⁸ Egy példa: tekintsünk öt változót és feltételezzük, hogy mindegyik $I(1)$ folyamatot követ: hazai árszínvonalváltozás (Δp), külföldi árszínvonalváltozás (Δp^*), a devizaárfolyam változása (Δe), hazai kamatláb (i), külföldi kamatláb (i^*). Elméleti ismereteink alapján az alábbi két paritásos kapcsolat fennállása feltételezhető: (1) vásárlóerő paritás: $\Delta p - \Delta p^* - \Delta e = u$, (2) kamatparitás: $i - i^* - \Delta e = v$ (ahol u és v nulla várható értékű stacionárius folyamatok). Azaz a két kointegráló vektor az $(1, -1, -1, 0, 0)$ és $(0, 0, -1, 1, -1)$, és ezek a kointegráló vektorok egymástól lineárisan függetlenek. A kointegráló vektorok lineáris kombinációja is kointegráló vektor, hiszen két stacionárius folyamat kombinációjáról van szó. Például vonjuk ki a második vektorból az első, amely közgazdaságilag jól értelmezhető összefüggéshez vezet: $(-1, 1, 0, 1, -1)$, azaz kiírva: $(i - \Delta p) - (i^* - \Delta p^*) =$ nulla várható értékű stacionárius változó, tehát a hazai és külföldi reálkamatláb nem tér el tartósan egymástól. Ezen három kointegráló vektorból azonban csak kettő független, hiszen bármelyik kettőnek a lineáris kombinációjából előállítható a harmadik.

Alkalmazás

A kointegráció fogalmának egyik szépsége, hogy illusztrálásához nem is feltétlenül kell bonyolult számításokat végezni, hanem néhány jól kiválasztott ábrával is sokat el lehet mondani róla. Erre az árak és a valutaárfolyamok kapcsolata is kitűnő lehetőséget ad. Az 1. ábra a magyar, a cseh, és a német fogyasztóiár-indexeket, valamint magyar forintnak és a cseh koronának a német márkával szembeni árfolyamát mutatja. (Az euró bevezetése után a rögzített euró-márka árfolyam alapján származtattuk a márkával szembeni árfolyamokat.) Az összehasonlíthatóság kedvéért mindegyik idősor értékét 100-ra normáltuk az 1996-os mintakezdetnél.

1. ábra. Fogyasztóiár-indexek és valutaárfolyamok, 1996. január – 2003. december
(Index: 1996. január = 100)



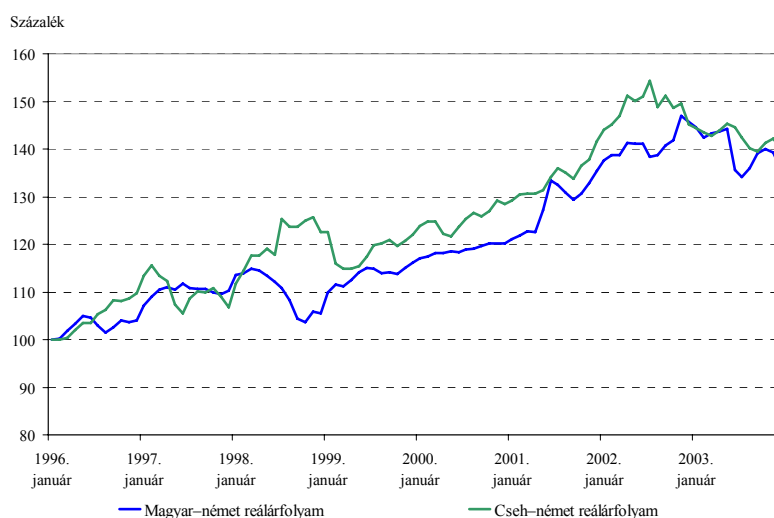
Forrás: IMF – International Financial Statistics.

Mint az ábráról leolvasható, a magyar árak több mint megkétszereződtek, a cseh árak közel 40 százalékkal, míg a német árak mintegy tíz százalékkal emelkedtek a vizsgált nyolc év alatt. A forintnak a márkával szembeni árfolyama kezdetben gyengült, azaz egyre több forintot kellett adni egy márkáért, de 2001 óta az értéke némi hullámszás után viszonylag stabilan alakult. Ezzel szemben a cseh korona értéke gyakorlatilag stabil volt az időszak nagy részében, sőt 2001 után még erősödött is a márkával szemben, azaz egyre kevesebb cseh koronát kellett adni egy márkáért.

Ezek után képezzük a belföldi árak, a német árak, és az árfolyam kombinációját olyan módon, hogy a belföldi árakat elosztjuk a német árak és az árfolyam szorzatával. A külföldi árak és az árfolyamnak a szorzata azt mutatja meg, hogy hazai pénzben (például forintban) mennyibe kerül a külföldi termék, így ha ezzel osztjuk el a belföldi árakat, ak-

kor a hazai és a külföldi termékek egymáshoz viszonyított relatív árát kapjuk meg, melyet reálárfolyamnak nevezünk. A 2. ábra mutatja a magyar-német és a cseh-német reálárfolyam alakulását, amelyeket az 1. ábrán látható alapadatokból számoltunk.

2. ábra. Németországgal szembeni reálárfolyamok, 1996. január – 2003. december
(Index: 1996. január = 100)



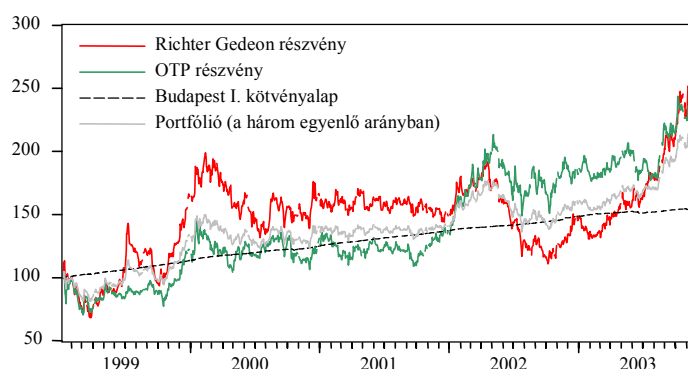
Forrás: Saját számítás az 1. ábra adatai alapján.

Annak ellenére, hogy a magyar árak és a forint árfolyamának időbeli pályája alapvetően eltért a cseh árak és a korona árfolyama pályájától, a két országnak a Németországgal szembeni reálárfolyama nagyon hasonló: a hét és fél év alatt mintegy negyven százalékkal emelkedtek, amelynek közgazdasági magyarázatát (a termelékenységekülönbségen alapuló reálfelértékelődés) meg tudjuk adni (lásd például Kovács [2002]), további integrált változókat tartalmazó modellből konstans várható értékű kointegráló kapcsolatot is ki tudunk mutatni. Azaz az árak és az árfolyamok akár tetszőlegesen is elbolyonghatnak, a közöttük levő összefüggés előbb vagy utóbb a felszínre tör, amelyet a kointegráció vizsgálatára kifejlesztett módszerekkel szabatosan lehet tanulmányozni.

ROBERT F. ENGLE ÉS A FELTÉTELES HETEROSZKEDASZTICITÁS

A gazdasági változók ingadozásai fontos szempontot jelentenek a különböző közgazdasági döntések meghozatalakor. Képzeljük el például, egy tőzsdén forgalmazott részvény árfolyamát, amely napról napra jelentős mértékben megváltozhat, vagy egy állampapírokba történő befektetés alapbefektetési jegyeinek értékét, amely stabilabb investíciót testesít meg. Az 3. ábra például két részvény (Richter Gedeon és az OTP), egy kötvényalap (Budapest I. befektetési alap), valamint ezen három pénzügyi eszköz együttes tartásából álló befektetés — azaz egy portfólió — értékét mutatja.

3. ábra. 100 forint kezdeti befektetés értékének alakulása
1999. január 3. és 2003. december 3. között



Forrás: Részvényárfolyamok: CA-IB Rt.; Kötvényalap: Budapest Befektetési Rt.

A portfólió összeállításánál azt feltételeztük, hogy a befektető azonos összeget fektetett be mindhárom pénzügyi eszközbe. Az áralakulások könnyebb összehasonlíthatóságának érdekében az 3. ábra azt mutatja, hogyan alakult volna száz forint 1999. január 3-i befektetés értéke az egyes eszközökbe, illetve a portfólióba az idő előrehaladtával. Az ábráról leolvasható, hogy a részvényárfolyamok igen nagy mértékben ingadoztak, míg a kötvényalap-befektetés értéke sokkal egyenletesebben gyarapodott a részvényekhez képest.

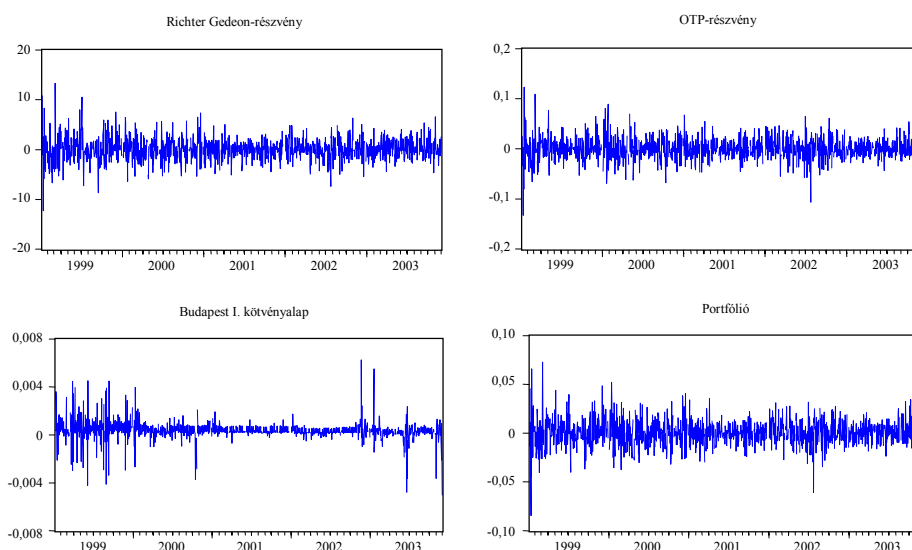
A feltételes heteroszkedaszticitás közgazdasági háttere

Gazdasági döntések meghozatalakor a változékonyság, melyet a pénzügyi szaknyelvben gyakran volatilitásnak (*volatility*) neveznek, kvantitatív mérése elengedhetetlen. A kellően általános „gazdasági döntések” kifejezés alatt legegyszerűbb esetben gondolhatunk például arra, hogy a megtakarításainkat milyen eszközökbe fektessük. Általánosabban, a változékonyság ismerete nélkülözhetetlen a részvények és egyéb pénzügyi eszközök árának meghatározásához. Emellett bármilyen statisztikai–ökonometria számítást is végzünk, ismernünk kell annak pontosságát. Például, ha egy előrejelzést készítünk arra vonatkozóan, hogy mennyi lesz egy részvény értéke holnap, két nap múlva, vagy egy hónap múlva, akkor ismernünk kell az előrejelzésünk megbízhatóságát, amelynek kiszámításához szintén a változékonyság valamely mérőszámát hívjuk segítségül.

Robert Engle munkássága előtt többnyire a szórás használták a változékonyság mérőszámaként. A szórás azonban akkor lehet jó mérőszáma a változékonyságnak, ha értéke stabil, azaz maga a szórás nem változik. Számos gazdasági változónál ugyanakkor helytelen feltételezés lenne a szórás állandósága: ehhez elég csak a 3. ábra részvényárfolyamaira pillantanunk, melyről látható, hogy vannak időszakok, amelyeket erősebb változékonyság jellemez és vannak csendesebbek. A változékonyságról személetesebb képet ad a 4. ábra, amely a 3. ábrán bemutatott befektetések hozamainak (azaz az egyik napról a másik napra történő árváltozásainak) százalékos értékét mutatja. Ezen az ábrán jól kive-

hető a „változékonyság csoportosulása” (*clusters of volatility*), azaz vannak periódusok, amikor alacsony a változékonyság, míg más időszakokban ez magas, vagy másképpen fogalmazva, egy adott napi magas változékonyságot jó eséllyel követ a következő napon is magas változékonyság, míg egy csendes napot valószínűleg egy másik csendes nap fog követni.

4. ábra. A befektetések értékének napi százalékos változása, 1999. január 3. – 2003. december 3.



Forrás: Saját számítások a 3. ábra adatai alapján.

Engle modelljének kifejlesztése előtt ezt a jelenséget úgy próbálták meg kezelni, hogy a szórás számításakor nem az egész mintaperiódust használták fel, hanem például csak a legfrissebb pár hét adatait. Ezzel az egyszerű módszerrel szemben azonban számos probléma vethető fel. Például, hogyan határozzuk meg, hogy hány nap adatait használjuk fel a számításokhoz? Másrésztől az ilyen módon való számítás azt feltételezi, hogy a hólnapi volatilitás számításában ugyanolyan szerepe a mai változékonyságnak, mint a sokkal korábbiaknak, amelyhez nem könnyű közgazdasági alátámasztást találni. Harmadrészt, mivel egy rövid megfigyelési időszaktól történik a becslés, így az jelentős becslési bizonytalansággal terhelt, hiszen hosszú idősorokból általában megbízhatóbb becsléseket lehet adni.

A nyolcvanas évek elején Engle [1982] egy elegáns ökonometriai modellt javasolt ezen problémák kezelésére, amelyet „autoregresszív feltételes heteroszkedaszticitásnak” (*autoregressive conditional heteroskedasticity – ARCH*) nevezett el.¹⁹ Az elnevezésben a „heteroszkedaszticitás” kifejezés a volatilitás változását jelenti, a „feltételes” arra utal, hogy valaminek a függvényében határozzuk meg a volatilitást, az „autoregresszív” pedig arra, hogy a mai volatilitás függ a volatilitás múltbeli értékeitől. Ez a modell, amelyet

¹⁹ Bár Engle az infláció modellezését választotta empirikus illusztrációul, az alkalmazások iránya hamar áttért a pénzügyi idősorokra.

számtalan további irányban fejlesztettek tovább, megoldást kínál az előző bekezdésben felvetett három problémára. Egyfelől nem határoz meg egy konkrét időtartamot a volatilitás mérésére, hanem elvileg az összes múltbeli értéket felhasználja, ezért egyben egy hosszú időszak alapján készülhet a számítás. Másfelől azonban nem egyenlő szerepet veszi a múltbeli értékeket figyelembe, hanem súlyozással: a közelmúltbeli eseményeknek nagyobb hatásuk van, mint a régieknek. A nagyságrendeket, azaz a súlyozást pedig az adatokra bízva: a modell bizonyos paraméterei határozzák meg a súlyokat, és ezeket a paramétereket egy-egy konkrét idősor alapján becsülni lehet. Azt talán meg sem kell említeni, hogy Engle kifejlesztette a paraméterek becsülésének technikáját is.

A modell

Az ARCH-modellek tehát nem a változó várható értékét, hanem annak varianciáját modellezik. Jellemezze például egy elsőrendű autoregresszív folyamat (AR(1)) a vizsgált változó várható értékét:

$$Y_t = \varphi_0 + \varphi_1 Y_{t-1} + u_t \quad /8/$$

A hibagról, u_t -ről feltettük, hogy független és azonos eloszlású (FAE) fehér zaj, azaz $E(u_t) = 0$ és $E(u_t^2) = \sigma^2$, $E(u_t u_{t-s}) = 0$, $s \neq 0$. Ezen feltételekből könnyen levezethető, hogy ha $|\varphi_1| < 1$, akkor $E(Y_t) = \mu = \varphi_0 / (1 - \varphi_1)$ és $E[(Y_{t-k} - \mu)^2] = \gamma_k$, tehát sem a várható érték, sem a második momentumok nem függenek t -től, így Y_t stacionárius.

Ha a hibatag ARCH(m) folyamatot követ, akkor a /8/ összefüggés helyett az alábbi három egyenlettel írható le a folyamat:

$$Y_t = \varphi_0 + \varphi_1 Y_{t-1} + u_t \quad /9/$$

$$u_t = v_t \sqrt{h_t} \quad /10/$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2 \quad /11/$$

ahol $\{v_t\}$ független és azonos eloszlású változó nulla várható értékkel és egységnyi varianciával. Ekkor a hibatag varianciájának feltételes várható értéke:

$$E(u_t^2 | u_{t-1}, u_{t-2}, \dots, u_{t-m}) = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2 \quad /12/$$

azaz felfoghatjuk a hibatag varianciájának folyamatát úgy is, mintha az egy AR(m) folyamatot követne:

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2 + w_t \quad /13/$$

ahol w_t FAE fehér zaj, $E(w_t) = 0$ és $E(w_t^2) = \lambda^2$, $E(w_t w_{t-s}) = 0$, $s \neq 0$. Az α_i paramétereknek olyanoknak kell lenniük, hogy $E(u_t^2 | u_{t-1}, u_{t-2}, \dots, u_{t-m}) > 0$ mindig fennálljon, amely $\alpha_0 > 0$ és $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ együttes feltétel esetén teljesül. Ha emellett még /13/ stacioná-

rius folyamatot követ, azaz ha $\sum_{i=1}^m \alpha_i < 1$, akkor meghatározható u_t^2 (nem feltételes) várható értéke:

$$E(u_t^2) = \alpha_0 / (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_m) . \quad /14/$$

Tehát, bár $E(u_t^2)$ konstans, u_t feltételes varianciája időben változó.

A feltételes/feltétel nélküli variancia kézenfekvő analógiája a feltételes/feltétel nélküli várható értéknek. Amennyiben Y_t folyamat stacionárius, amely a /8/ egyenletben feltételezett AR(1) parametrizálás mellett a $|\varphi_1| < 1$ feltétellel írható le, akkor Y_t -nek konstans a várható értéke, amely $\varphi_0/(1-\varphi_1)$, de feltételes várható értéke, amely $E(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-p}) = \varphi_0 + \varphi_1 Y_{t-1}$, időben változik.

Ha egy AR-ARCH specifikációban mind a várható érték, mind pedig a variancia egyenlet stacionárius, akkor a modellezett folyamatnak mind a feltétel nélküli várható értéke, mind a feltétel nélküli varianciája állandó, viszont mind a feltételes várható értéke, mind pedig a feltételes varianciája változik.

ARCH hatások tesztelésére alapvetően két módszer létezik, de egyikhez sem szükséges a modell ARCH-ként való becslése, hanem egy megfelelő (várható értékre vonatkozó) regresszió becslt hibatajait kell vizsgálni.

1. Ha jelen vannak ARCH-hatások, akkor az ARCH nélkül becslt egyenletünkben, bár a hibatagok autokorrelálatlanok, de a hibatagok négyzete autokorrelált.²⁰ Így a hibatagok négyzetének korrelogramjára pillantva, valamint a *Box–Pierce* és a *Ljung–Box* statisztikákat a hibatagok négyzeteiből számított autokorrelációra alkalmazva tesztelhetünk.

2. ARCH LM-teszt: a várható értékre becslt egyenlet becslt hibatajainak négyzetére (\hat{u}_t^2) egy AR(m) modell illesztése:

$$\hat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{u}_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m \hat{u}_{t-m}^2 + e_t , \quad /15/$$

amelynél belátható, hogy a $T \cdot R^2$ -statisztika, ahol T a megfigyelésszámot és R^2 a determinációs együtthatót jelenti, a $\chi^2(m)$ eloszláshoz tart azon nullhipotézis mellett, hogy $u_t \sim \text{FAE } N(0, \sigma^2)$.

A /9/–/10/–/11/ képletekkel jellemzett modell maximum likelihood becslése kézenfekvő. Egy standard regressziós egyenletben a hibatagról, u_t -ről, többnyire feltesszük, hogy normális eloszlású, így egy ARCH-modellben is kézenfekvő feltevésnek látszik v_t standard normális eloszlása. Ekkor a folyamat likelihood függvénye könnyen felírható. Az egyszerűség kedvéért jelöljük a várható érték egyenletét $Y_t = \varphi_0 + \varphi_1 Y_{t-1} + u_t = \mathbf{X}_t' \boldsymbol{\beta} + u_t$ -vel, ahol \mathbf{X} mátrix a magyarázó változókat – jelen esetben a konstans és a késleltett Y -t – tartalmazza. Ekkor a megfigyelt y_t feltételes sűrűségfüggvénye:

$$f(y_t | \mathbf{x}_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(-\frac{(y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta})^2}{2h_t}\right) \quad /16/$$

²⁰ Az empirikus munkánál figyelni kell arra, hogy az ARCH-hatások tesztelése előtt a hibatagokban ne legyen autokorreláció, azaz ennek megfelelő modellt kell felállítani a várható értékre.

ahol $h_t = \alpha_0 + \alpha_1(y_{t-1} - \mathbf{x}'_{t-1}\boldsymbol{\beta})^2 + \alpha_2(y_{t-2} - \mathbf{x}'_{t-2}\boldsymbol{\beta})^2 + \dots + \alpha_m(y_{t-m} - \mathbf{x}'_{t-m}\boldsymbol{\beta})^2$. A fenti sűrűségfüggvény logaritmusát véve és t -szerint összegezve adódik a log-likelihood függvény, melynek numerikus értéke konkrét α és β paramétervektorok, valamint a variancia megfelelő számú kezdőértékei mellett (hiszen ez m késleltetett hibatagból számolódik ki²¹) meghatározható, ezért a szokásos módszerek alapján numerikusan maximalizálható.

Előzmények és továbbfejlesztések

A pénzügyi változók főbb jellemezőit már Engle előtt is ismerték a közgazdászok, például Mandelbrot [1963] lejegyezte, hogy „nagy mozgást többnyire nagy mozgás (tetszőleges előjelű) követ, míg kicsit többnyire kicsik”, de sem ő, sem a pénzügyi piacokat vizsgáló többi közgazdász nem modellezte ezt a jelenséget.²² Ezért Engle modellje valódi áttörést jelentett a pénzügyi változók modellezésében, és egy hatalmasra duzzadó irodalmat indított el. Az ARCH(m)-modellt számtalan irányba fejlesztették tovább. A legátfogóbb továbbfejlesztés Bollerslev [1986] munkájához fűződik, amely az ún. általánosított ARCH, azaz GARCH (*generalized ARCH*) specifikációt javasolta. Fő motivációja az volt, hogy az ARCH(m) modellek gyakorlati vizsgálatai során meglehetősen hosszú késleltetés számra, és így becslendő paraméterre volt szükség a modell megfelelő illeszkedéséhez. A GARCH(p,q) specifikáció a /11/-es egyenletet az alábbival helyettesíti:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \dots + \beta_p h_{t-p} . \quad /17/$$

Ekkor végtelen számú késleltetett hibatag-négyzet határozza meg h_t -t, ami rekurzív visszahelyettesítéssel könnyen belátható. Legyen $e_t = u_t^2 - h_t$, azaz a variancia előrejelzésének hibája. Ekkor a fenti egyenlet megfelelő átrendezésével

$$u_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)u_{t-1}^2 + \dots + (\alpha_{\max(p,q)} + \beta_{\max(p,q)})u_{t-\max(p,q)}^2 - \beta_1 e_{t-1} - \dots - \beta_p e_{t-p} + e_t \quad /18/$$

adódik, amelynél értelemszerűen $\alpha_i = 0 \quad \forall i > q$ és $\beta_j = 0 \quad \forall j > p$. Azaz, u_t^2 felfogható egy olyan folyamatként, amely egy ARMA($\max(p,q),p$) folyamatot követ.

Az alkalmazások során számtalan esetben az adódott, hogy egy GARCH(1,1) specifikáció kellően jó illeszkedést adott a legkülönbözőbb idősorokra, így ezzel a specifikációval valóban számottevően lehetett csökkenteni a becslendő paraméterek számát.

Pénzügyi adatoknál, pontosabban a részvény- és devizaárfolyam-változásoknál azonban egy olyan empirikus megfigyelés adódott eredményül, hogy az eloszlások szélei vastagabbak, mint amelyet a normális eloszlás implikálna (*fat tails*), azaz a nagy változások (bármely irányba) relatíve gyakrabban alakulnak ki. Ezért /10/-es egyenletben standard normális eloszlás helyett sokszor a t -eloszlást feltételeznek v_t -re, és az eloszlás szabad-

²¹ Például u_t feltételes varianciájának kiszámolásához szükséges $u_0, u_{-1}, \dots, u_{-m+1}$ varianciáinak ismerete, amelyet variancia-kezdőértékeknek nevezünk. A leggyakrabban használt eljárás szerint az m darab kezdőértéket a hibatag átlagos varianciájával tesszük egyenlővé. Egy másik, ritkábban alkalmazott megoldás szerint a kezdeti feltételes varianciát is becslendő paraméternek tekintik.

²² A hivatkozás és idézet forrása: The Royal Swedish Academy of Sciences [2003].

ságfok-paraméterét is becsülendő paraméternek tekintik.²³ Mivel a t -eloszlás nagy szabadságfok mellett közelít a normálishoz, így a szabadságfok-paraméter becsült értékéből és konfidencia-intervallumból arra is következtethetünk, hogy az adott idősorra a normális eloszlás feltevése mennyire lehet helytálló.²⁴

Ezekon túlmenően is számtalan továbbfejlesztés látott napvilágot, amelyek rövidítése egy-két betűvel tér el az Engle által bevezetett ARCH-rövidítéstől, például TARCH, IGARCH, EGARCH, ARCH-M, AGARCH, NGARCH, QARCH, QTARCH, STARCH, SWARCH, FIGARCH. (Lásd például *Bollerslev–Engle–Nelson* [1994].)²⁵

Alkalmazás

A módszer nemcsak a múlt leírására, hanem a változékonyság előrejelzésére is alkalmas, amely forradalmi áttérésnek is tekinthető a pénzügyi termékek árainak értékeléséhez.²⁶ A részvényeknél például általánosan elfogadott eredmény az úgynevezett „véletlen bolyongás” (*random walk - RW*) hipotézise. Az előrejelzés szempontjából ennek az a jelentősége, hogy a holnapai árfolyam értékéről csak annyit tudunk mondani, hogy az várhatóan annyi lesz, mint a mai, illetve, ha van egy tartós növekedési tendencia, akkor az előrejelzés a mai árfolyamnak az egy napra jutó átlagos növekedéssel növelt értéke. Ennek egyébként kézenfekvő közgazdasági magyarázata is van: ha mindenki tudná, hogy holnap a részvényárfolyam emelkedni fog, akkor már ma mindenki bevásárolna a részvényből, így az ár már ma megemelkedne. Tömören fogalmazva azt mondhatjuk, hogy a részvényárakat nem lehet előre jelezni, ugyanakkor a gyakorlati tapasztalatok alapján az ARCH-modell és továbbfejlesztései alkalmasak arra, hogy az árfolyam volatilitását előre jelezzék, ami rendkívül fontos eredmény a pénzügyi piacok működése szempontjából.

A volatilitás előrejelzéséhez kapcsolódik egy konkrét, jogszabályban is kodifikált felhasználás is. 1996 óta ugyanis egy nemzetközi egyezmény, amelyet bázei szabályoknak is neveznek, előírja az úgynevezett *kockázatosított érték* (*value at risk*) használatát a bankok tőkekövetelményeinek meghatározásánál.²⁷ Például az 1 százalékos kockázatosított érték azt jelenti, hogy mekkora az az összeg, amely 99 százalékos valószínűséggel nagyobb a következő napi veszteségnél. A szabályozás természetesen úgy szól, hogy minél nagyobb a kockázatosított érték, annál nagyobb biztonsági tartalékot kell a bankoknak képezniük. Ha a volatilitás állandó lenne, akkor a kockázatosított érték sem változna. A korábbiakban ugyanakkor bemutattuk, hogy a pénzügyi eszközök esetén a volatilitás időben változó, és így a kockázatosított érték is időben változik.

²³ *Palágyi* [1999 és 2003] a Lévy-eloszlás feltételezése mellett GARCH-modellt elemzi. A 2003-as munkájában a MOL- és a CISCO-részvények adataira végzett becslés alapján azt találja, hogy bár a modell jobban illeszkedik, mint a normális eloszlás feltételezésével készített becslés, de a maradéktagok stabilitása elvethető, amely megkérdőjelezi a Lévy-eloszlások használatának létjogosultságát.

²⁴ Egy korábbi munkánkban (*Darvas* [2001a]) hazai kincstárjegy-hozam változásainak feltételes varianciáját vizsgáltuk ARCH-, GARCH-, és SWARCH-modellekkel mind normális, mind pedig t -eloszlás mellett. A t -eloszlás szabadságfokára alacsony, 3-4 körüli becsült értékek adódtak viszonylag szűk konfidencia-intervallummal, amely a normális eloszlásnál szélesebb eloszlásszélekre utalnak.

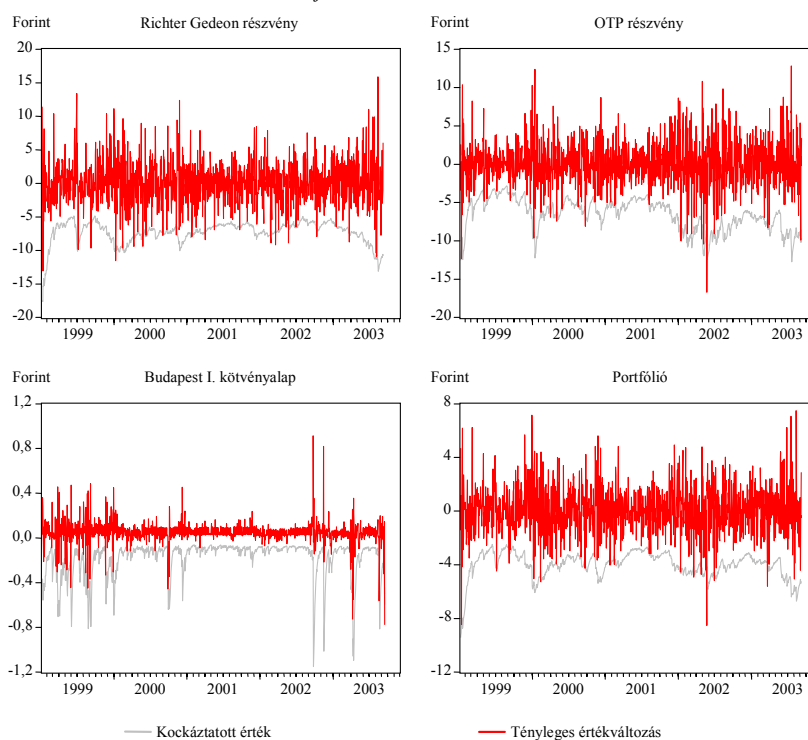
²⁵ A hazai szerzők közül *Varga* [2001] tekinti át az ARCH-modell számos továbbfejlesztését, köztük az ún. FIGARCH-modellt is, amely a korábban említett frakcionális integráció fogalmát alkalmazza a volatilitás egyenletében. *Pafka et al.* [2001] kiterjesztik a FIGARCH-modellt többváltozós esetre, levezetik annak becselőfüggvényét, és empirikus alkalmazzák három vezető nemzetközi valuta árfolyamára, amelyekre a modell jó illeszkedést mutat.

²⁶ A volatilitás előrejelzéséről *Poon–Granger* [2003] adnak átfogó irodalmi ismertetőt.

²⁷ A kockázatosított érték számításának módszereiről *Manganelli–Engle* [2001] adnak átfogó irodalmi ismertetőt.

Az illusztráció kedvéért kiszámoltuk a 3. ábrán látható négy befektetési lehetőség, azaz a két részvény, a kötvényalap, és a három együtteséből álló portfólió 1 százalékos, másnapra vonatkozó kockázatos értékét és a ténylegesen bekövetkezett veszteségeket/nyereségeket. A kockázatos értéket a hozamokra, pontosabban az árfolyamok logaritmusának a növekményére illesztett konstans növekmény²⁸ plusz GARCH(1,1) modell alapján számítottuk, amelynél a /10/-es egyenletben szereplő v_t változó standard normális eloszlást követ. Ennek alapján készítettünk egynapos előrejelzést a hozamok volatilitására, amelyet átszámítottunk a 100 forint kezdeti értékű befektetés forintban mért másnapi 1 százalékos kockázatos értékévé. A számítások eredményét mutatja az 5. ábra.

5. ábra. A befektetések értékének napi forintban mért változása és a kockázatos érték, 1999. január 3. – 2003. december 3.



Forrás: Saját számítások a 3. ábra adatai alapján.

Mindegyik részabrában látható egyrészt a befektetés értékének változása (forintban), másrészt a hozzá tartozó 1 százalékos kockázatos érték. A tényleges veszteség viszonylag ritkán haladja meg (abszolút értékben) a számított kockázatos értéket, de a számítás valószínűségi természetéből, azaz abból, hogy 99 százalékos biztonságot írtunk csak elő, következik az, hogy időnként nagyobb lehet és lesz a veszteség a számított kockázatos

²⁸ Azaz a várható érték egyenletében egyedül a konstans volt a magyarázó változó, összhangban az eltolásos véletlen bolyongás hipotézisével.

értéknél. Ez a valószínűségi érték azt jelenti, hogy 100 esetből egyszer fordul ez elő, amelyet a számítások nagyjából vissza is igazolnak, bár ennél némileg magasabb lett az arány, amely arra utal, hogy az eloszlás szélei szélesebbek, mint amelyet a normális eloszlás implikálna. Az egyes befektetésekre vonatkozó eredményeket összevetve, a részvénybefektetés sokkal nagyobb kockázatot hordozott magában, mint a kötvénybefektetés, ami nem meglepő. A portfólió kockázatát mutató ábrából pedig a közgazdaságtan egy másik, korábban szintén Nobel-díjjal jutalmazott igazságára is fény derül, nevezetesen egy portfólió tartása mérsékli a kockázatot ahhoz képest, mintha egyetlen kockázatos pénzügyi eszközbe fektetnénk minden vagyónunkat. Bár példánkban az alacsonyabb portfólió-kockázathoz az is hozzájárult, hogy egy rendkívül alacsony kockázatú kötvényalap is helyet kapott benne egy-harmadnyi súllyal, de ha csak a két részvényből képeztünk volna egy portfóliót, akkor annak változékonysága is kisebb lett volna bármilyen részvény egyedi változékonyságánál.

TOVÁBBI HOZZÁJÁRULÁSOK

Engle és Granger a Nobel-díj odaítélésekor kiemelt egy-egy fő témakörön kívül számos egyéb területen is hozzájárultak az idősorlemzés fejlődéséhez.

A spektrálemzés területén *Granger–Hatanaka* [1964] munkája alapvető tankönyvnek számít. Ugyancsak még a hatvanas években maradandó nyomot hagyott *Granger* [1969] az okság egy lehetséges értelmezésén, amelyet azóta „Granger-okságnak” neveznek és manapság is gyakran használják.²⁹ Granger az idősorok előrejelzési módszertanához számos cikkében és könyvében adott fontos hozzájárulásokat, például *Granger–Bates* [1969] az előrejelzések kombinálásának első fontos cikke volt, vagy *Granger–Newbold* [1977] és *Granger* [1980] az előrejelzések módszertanának kiemelkedő leírásai. Az úgynevezett *frakcionálisan integrált (fractionally integrated)* idősormodelleknek, amelyek ún. *hosszú memóriájú (long-memory)* idősorokhoz vezethetnek, *Granger–Joyeux* [1980] volt a fő kidolgozója. Végül felsorolásunk utolsó témaköre (amely koránt sem jelenti Granger hozzájárulásainak utolsó témakörét) a manapság oly divatos nemlineáris idősormodellek területén a hetvenes évektől napjainkig számos fontos munka társítható Granger nevéhez, mint például *Granger–Anderson* [1978], amely az egyik első munka volt ebben a témakörben, vagy a *Timo Teräsvirtával* írt 1993-as könyv.

Engle a volatilitás kidolgozásával közel egyidőben jelentetett meg egy másik, rendkívül sokszor hivatkozott cikket az exogenitás különböző definícióiról (*Engle–Hendry–Richards* [1983]), mely témakört a későbbiekben tovább vizsgálta (*Engle–Hendry* [1993]).³⁰ Mint említettük, Engle társszerzője volt Grangernek a kointegráció tesztelési

²⁹ Az okság fogalmáról és lehetséges tesztelés eljárásokról lásd *Kőrösi et al.* [1990] 21. fejezet. A hazai szerzők közül például *Ulbert–Rappai* [2002] vizsgálják különböző tőzsdeindexek közötti Granger-okságot és arra az eredményre jutnak, hogy a fejlett nyugati tőzsdék Granger-okai a kelet-európai tőzsdéknek, de a fordított irányú okság nem áll fenn. *Darvas–Sass* [2002] a magyar és az európai külkereskedelmi idősorok között teszteli a Granger-okságot és arra az eredményre jutnak, hogy az EU-ban az export húzza az importot, Magyarországon nem mutatható ki egyértelmű kapcsolat a két hazai idősor között, viszont az EU-import segít a magyar export előrejelzésében.

³⁰ A hazai szerzők közül például *Charemza–Király* [1990] a szocialista országokon bejelentett tervek és a tényleges kibocsátás kapcsolatát elemzi különböző exogenitási vizsgálatokkal. Eredményeikben arra a következtetésre jutnak, hogy míg a Szovjetunióban a gazdasági törvényszerűségeket figyelmen kívül hagyó, a gazdaság átalakítását célzó, úgynevezett „hithű” tervek exogénnek voltak tekinthetők a tényleges kibocsátásra nézve, addig Magyarországon a múltbeli tényleges kibocsátási adatokat és a gazdasági törvényszerűségeket jobban figyelembe vevő, úgynevezett „generikus tervezés” folyt. Az általuk vizsgált további öt szocialista ország a két szélső eset között, de inkább a generikus tervezéshez állt közelebb.

és becslési eljárásának kidolgozásában, és ezért az „Engle–Granger-módszer” elnevezés használatos a kointegráció tesztelésére és becslésére vonatkozó legalapvetőbb módszerre. Ez a szerzőpáros a későbbiekben is kutatott együtt a kointegráció modelljeinek továbbfejlesztésén. Engle is írt a spektrálemzés területén fontos hozzájárulásokat és Granger társszerzője volt az 1983-as *The Handbook of Statistics* spektrálemzésről szóló fejezetének. A pénzügyi piacok egyes aspektusainak modellezéséről Engle számos cikket jelentetett meg, mint például az időben változó kockázati prémium (*Engle–Lilien–Robins* [1987]), a napon belüli volatilitás (*Engle* [1990]), különböző pénzügyi eszközök volatilitásának közös vizsgálata (*Bollerslev–Engle–Wooldridge* [1988], *Bollerslev–Engle* [1993], *Engle–Kroner* [1995]), a tranzakciós szintű adatok vizsgálata (*Engle–Russel* [1998] és *Engle* [2000]), és az időben változó korreláció (*Engle* [2002]). Engle volt – Daniel L. McFaddennel, a 2000-es Nobel-díjassal együtt – a *The Handbook of Econometrics* 1994-es IV. kötetének társszerkesztője.

*

A tudományos kutatás eredetiségének és megtermékenyítő erejének egyik, sőt talán a legfontosabb fokmérője az, hogy az adott munkát követően a szakfolyóiratokban megjelent cikkek közül hányan hivatkoznak rá. Robert F. Engle és Clive W. J. Granger a legidézettebb szerzők közé tartoznak, és az általuk kifejlesztett módszerek olyan megújító hatást gyakoroltak az idősorelemzésre, hogy méltán váltak érdemessé a Nobel-díjra.

FÜGGELÉK

A közgazdasági Nobel-díjasok, 1969–2003

Év	Díjazott	Szakterület	Indoklás
1969	Ragnar Frisch Oslo University Jan Tinbergen The Netherland School of Economics	Ökonometria	Gazdasági folyamatok dinamikus modelljeinek kifejlesztéséért és alkalmazásáért.
1970	Paul A. Samuelson Massachusetts Institute of Technology	Parciális és általános egyensúlyelmélet	Tudományos munkásságáért, mely kifejlesztette a statikus és dinamikus közgazdasági elméletet és aktívan hozzájárult a közgazdaságtudományi elemzés színvonalának emeléséhez.
1971	Simon Kuznets Harvard University	Gazdasági növekedés és gazdaságtörténet	A gazdasági növekedés empirikusan megalapozott értelmezéséért, amely új és mélyebb megértését adta a fejlődés gazdasági és társadalmi struktúráinak és folyamatának.
1972	Sir John R. Hicks Oxford University Kenneth J. Arrow Harvard University	Általános egyensúlyelmélet	Úttörő hozzájárulásukért a közgazdasági egyensúly- és a jóléti elmélethez.
1973	Wassily Leontief Harvard University	Input-output elemzés	Az input-output módszerek kifejlesztéséért és fontos gazdasági problémákra való alkalmazásáért.
1974	Gunnar Myrdal University of Stockholm Friedrich von Hayek University of Freiburg	Makroökonómia és intézményi közgazdaságtan	A pénzügyi és gazdasági fluktuációk elméletéhez való úttörő hozzájárulásukért és a gazdasági, társadalmi, és intézményi jelenségek kölcsönös függésének átfogó elemzéséért.
1975	Leonid Kantorovich Academy of Sciences, Moscow Tjalling C. Koopmans Yale University	Optimális forrásallokáció elmélete	A források optimális allokációjának elméletéhez való hozzájárulásukért.

(A tábla folytatása a következő oldalon.)

(Folytatás.)

Év	Díjazott	Szakterület	Indoklás
1976	Milton Friedman University of Chicago	Makroökonómia	A fogyasztásemélet, valamint a monetáris elmélet és történelem területén elért eredményeiért, valamint a stabilizációs politika komplexitásának kimutatásáért.
1977	Bertil Ohlin Stockholm School of Economics James E. Meade Cambridge University	Nemzetközi közgazdaságtan	A nemzetközi kereskedelem és a nemzetközi tőke mozgások elméletéhez adott áttörő hozzájárulásukért.
1978	Herbert A. Simon Carnegie-Mellon University	Vezetéstudomány	A gazdasági szervezeteken belüli döntési folyamat területén végzett úttörő kutatásaiért.
1979	Theodore W. Schultz University of Chicago Sir Arthur Lewis Princeton University	Gazdasági fejlődés	A gazdasági fejlődés úttörő kutatásaiért, különös tekintettel a fejlődő országok problémáinak elemzéséért.
1980	Lawrence R. Klein University of Pennsylvania	Ökonometria	Ökonometriai modellek megalkotásáért és a gazdasági fluktuációk és gazdaságpolitikák elemzésére való alkalmazásáért.
1981	James Tobin Yale University	Makroökonómia	A pénzügyi piacok elemzéséért, valamint a pénzügyi piacoknak a fogyasztási döntésekkel, foglalkoztatással, termeléssel, és árakkal való kapcsolatának elemzéséért.
1982	George J. Stigler University of Chicago	Iparági szervezetek	Az iparági szerkezet, a piacok működése, és az állami szabályozás okainak és következményeinek alapvető kutatásaiért.
1983	Gerard Debreu University of California, Berkeley	Általános egyensúlyelmélet	Új analitikus módszereknek a közgazdasági elméletbe való bevezetéséért, és az általános egyensúlyelmélet megreformálásáért.
1984	Sir Richard Stone Cambridge University	Nemzeti számlák	A nemzeti számlák rendszerének fejlesztésében végzett alapvető hozzájárulásáért, mellyel nagymértékben javította az empirikus vizsgálatok alapjait.
1985	Franco Modigliani Massachusetts Institute of Technology	Makroökonómia	A megtakarítás és a pénzügyi piacok úttörő elemzéséért.
1986	James M. Buchanan, Jr. George Mason University	Közpénzügyek	A gazdasági- és politikai-döntéshozatal elmélet jogtudományi alapjainak kifejlesztéséért.
1987	Robert M. Solow Massachusetts Institute of Technology	Gazdasági növekedés	A gazdasági növekedés elméletéhez való hozzájárulásáért.
1988	Maurice Allais École Nationale Supérieure des Mines de Paris	Parciális és általános egyensúlyelmélet	A piacelmélethez és a hatékony forrásfelhasználáshoz való úttörő hozzájárulásáért.
1989	Trygve Haavelmo University of Oslo	Ökonometria	Az ökonometria valószínűség-számítási alapjainak tisztázásáért és a szimultán közgazdasági rendszerek elemzéséért.
1990	Harry M. Markowitz City University of New York Merton M. Miller University of Chicago William F. Sharpe Stanford University	Pénzügy	A pénzügyi közgazdaságtan elméletéhez való úttörő hozzájárulásukért.
1991	Ronald H. Coase University of Chicago	Intézményi közgazdaságtan	A tranzakciós költségek és a tulajdonjogok intézményi változásokban és a gazdaság működésében betöltött szerepének felfedezéséért és tisztázásáért.
1992	Gary S. Becker University of Chicago	Mikroökonómia és gazdasági szociológia	A mikroökonómiai elemzés alkalmazásának kiterjesztésére az emberi viselkedés és interakció különböző területeire, beleértve a nempiaci viselkedést.
1993	Robert W. Fogel University of Chicago Douglass C. North Washington University, St. Louis	Gazdaságtörténet	A gazdaságtörténeti kutatások megújításáért a közgazdasági elméletek és kvantitatív módszerek alkalmazásával a gazdasági és intézményi változások magyarázatára.

(A tábla folytatása a következő oldalon.)

(Folytatás.)

Év	Díjazott	Szakterület	Indoklás
1994	John C. Harsanyi University of California, Berkeley John F. Nash Princeton University Reinhard Selten Rheinische Friedrich- Wilhelms-Universität, Bonn	Játékelmélet	A nemkooperatív játékok elméletének úttörő elemzéséért.
1995	Robert E. Lucas, Jr. University of Chicago	Makroökonómia	A racionális várakozások hipotézisének kifejlesztéséért és alkalmazásáért, amellyel a makrogazdasági elemzést megváltoztatta és elmélyítette tudásunkat a gazdaságpolitikáról.
1996	James A. Mirrlees University of Cambridge William Vickrey Columbia University	Információ közgazdaságtana	Az alapvető hozzájárulásukért az aszimmetrikus információ mellett ösztönzés közgazdasági elméletéhez.
1997	Robert C. Merton Harvard University Myron S. Scholes Stanford University	Pénzügy	A pénzügyi derivatív termékek árazására kidolgozott új módszerekért.
1998	Amartya Sen University of Cambridge	Jóléti közgazdaságtan	A jóléti közgazdaságtanhoz való hozzájárulásáért.
1999	Robert A. Mundell Columbia University	Makroökonómia	A monetáris és fiskális politika elemzéséért különböző árfolyamrendszerek mellett, valamint az optimális valutaövezetek elméletéért.
2000	James J. Heckman University of Chicago Daniel L. McFadden University of California, Berkeley	Ökonometria	A szelektív megfigyelések elemzésére kidolgozott elméletért és módszertanért. A diszkrét értékű megfigyelések elemzésére kidolgozott elméletért és módszertanért.
2001	George A. Akerlof University of California, Berkeley A. Michael Spence Stanford University Joseph E. Stiglitz Columbia University, New York	Információ közgazdaságtana	Az aszimmetrikus információjú piacok elemzéséért.
2002	Daniel Kahneman Princeton University Vernon L. Smith George Mason University, Fairfax	Pszichológiai és kísérleti közgazdaságtan	A pszichológiai kutatás közgazdaságtudományba való integrálásáért, különös tekintettel a bizonytalanság melletti véleményformálás és döntés területére. A laboratóriumi kísérletek, mint az empirikus közgazdasági elemzés egy eszközének megalapozásáért, különös tekintettel az alternatív piaci mechanizmusok elemzésében.
2003	Robert F. Engle New York University Clive W. J. Granger University of California, San Diego	Ökonometria	A gazdasági idősorok időben változó volatilitását (ARCH) vizsgáló módszerekért. A közös trendeket (kointegráció) követő gazdasági idősorokat vizsgáló módszerekért.

Forrás: 1969–2000: Assar Lindbeck [2001], 2001–2003: www.nobel.se

IRODALOM

- BOLLERSLEV, T. [1986]: Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*. 31. évf. 3. sz. 307–327. old.
- BOLLERSLEV, T. – ENGLE, R. F. [1993]: Common persistence in conditional variances. *Econometrica*. 61. évf. 1. sz. 167–186. old.
- BOLLERSLEV, T. – ENGLE, R. F. – WOOLDRIDGE, J. M. [1988]: A capital asset pricing model with time varying covariances. *Journal of Political Economy*. 96. évf. 1. sz. 116–131. old.

- BOLLERSLEV, T. – ENGLE, R. F. – NELSON, D. B. [1994]: ARCH models. In: *Engle, R. F. – McFadden, D. F.* (szerk.) *The handbook of econometrics*. IV. köt. North Holland. Amsterdam.
- BOX, G. E. P. – JENKINS, G. M. [1970]: *Time series analysis, forecasting and control*. Holden Day. San Francisco.
- CHAREMZA, W. W. – KIRÁLY, J. [1990]: Plans and Exogeneity: The genetic-teleological dispute revisited. *Oxford Economic Papers*. 42. évf. 3. sz. 562–573. old.
- DARVAS ZS. [2001a]: Árfolyamrendszer-hitelesség és kamatláb-változékonyság. *Statisztikai Szemle*. 79. évf. 6. sz. 490–507. old.
- DARVAS ZS. [2001b]: *Exchange rate pass-through and real exchange rate in EU candidate countries*. Deutsche Bundesbank Discussion Paper 10/2001.
- DARVAS ZS. – SASS M. [2002]: Changes in Hungarian foreign trade and trade balance with the European Union, A time series approach. In: *Karadeloglou, P.* (szerk.): *Enlarging the EU: The Trade Balance Effects*. Palgrave.
- DARVAS ZS. – SIMON A. [2002]: A financiálisan fenntartható kibocsátás becslése a gazdaság nyitottságának felhasználásával. *Közgazdasági Szemle*. XLIX. évf. 5. sz. 361–376. old.
- DAVIDSON, J. E. H. – HENDRY, D. F. – SRBA, F. – YEO, S. [1978]: Econometric modelling of the aggregate time-series relationship between consumer's expenditure and income in the United Kingdom. *Economic Journal*. 88. évf. 352. sz. 661–692. old.
- DICKEY, D. A. – FULLER, W. A. [1979]: Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*. 74. évf. június, 427–431. old.
- ENGLE, R. F. [1982]: Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*. 50. évf. 4. sz. 987–1007. old.
- ENGLE, R. F. – ITO, T. – LIN, W.-L. [1990]: Meteor showers or heat waves? Heteroskedastic intra-day volatility in the foreign exchange market. *Econometrica*. 58. évf. 3. sz. 525–542. old.
- ENGLE, R. F. – RUSSEL, J. R. [1998]: Autoregressive conditional duration: a new model for irregularly spaced transaction data. *Econometrica*. 66. évf. 5. sz. 1127–1162. old.
- ENGLE, R. F. [2000]: The econometrics of ultra-high frequency data. *Econometrica*. 68. évf. 1. sz. 1–22. old.
- ENGLE, R. F. [2002]: Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business and Economic Statistics*. 20. évf. 3. sz. 339–350. old.
- ENGLE, R. F. – GRANGER, C. W. J. [1987]: Co-integration and error correction: representation, estimation and testing. *Econometrica*. 55. évf. 2. sz. 251–276. old.
- ENGLE, R. F. – HENDRY, D. F. [1993]: Testing superexogeneity and invariance in regression models. *Journal of Econometrics*. 56. évf. 1–2. sz. 119–139. old.
- ENGLE, R. F. – HENDRY, D. F. – RICHARDS, J.-F. [1983]: Exogeneity. *Econometrica*. 51. évf. 2. sz. 277–304. old.
- ENGLE, R. F. – LILJEN, D. – ROBINS, R. [1987]: Estimation of time varying risk premia in the term structure: the ARCH-M model. *Econometrica*. 55. évf. 2. sz. 391–407. old.
- ENGLE, R. F. – KRONER, K. [1995]: Multivariate simultaneous GARCH. *Econometric Theory*. 11. évf. 1. sz. 122–150. old.
- FULLER, W. A. [1976]: *Introduction to statistical time series*. John Wiley. New York.
- GRANGER, C. W. J. [1969]: Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica*. 37. évf. 3. sz. 424–438. old.
- GRANGER, C. W. J. [1981]: Some properties of time series and their use in econometric model specification. *Journal of Econometrics*. 16. évf. 1. sz. 121–130. old.
- GRANGER, C. W. J. – HATANAKA, M. [1964]: *Spectral analysis of economic time series*. Princeton University Press. Princeton.
- GRANGER, C. W. J. – NEWBOLD, P. [1974]: Spurious regressions in econometrics. *Journal of Econometrics*. 2. évf. 2. sz. 111–120. old.
- GRANGER, C. W. J. – NEWBOLD, P. [1977]: *Forecasting economic time series*. Academic Press.
- GRANGER, C. W. J. – BATES, J. [1969]: The combination of forecasts. *Operations Research Quarterly*. 20. évf. 451–468. old.
- GRANGER, C. W. J. – ANDERSON, A. P. [1978]: *Introduction to bilinear time series models*. Vandenhoeck and Ruprecht: Göttingen.
- GRANGER, C. W. J. – TERÁSVIRTA, T. [1993]: *Modelling nonlinear dynamic relationships*. Oxford University Press.
- GRANGER, C. W. J. [1980]: *Forecasting in business and economics*. Academic Press.
- GRANGER, C. W. J. – JOYEUX, R. [1981]: An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*. 1. évf. 1. sz. 15–30. old.
- HAMILTON, J. D. [1994]: *Time Series Analysis*. Princeton University Press. Princeton.
- HORNOK A. – MÁTYÁS L. – SZÁLKA G. [1999]: Long Memory Processes: Theory and Applications. *Gazdasági Minisztérium, Gazdaságkutató Intézet Working Paper 3/99*.
- HORVÁTH Cs. – KREKÓ J. – NASZÓDI A. [2004]: Kamatátgyűrés Magyarországon. *MNB-Füzetek*. 2004/2. Elektronikus elérhetőség: www.mnb.hu
- HUNYADI L. [1994] Egységgyökök és tesztjeik. *Sigma*. XXV. évf. 3. sz. 135–164. old.
- JAKAB M. Z. – KOVÁCS M. A. [2002] Magyarország a NIGEM-modellben. *MNB-Füzetek*. 2002/3. Elektronikus elérhetőség: www.mnb.hu
- JAKAB, M. Z. – KOVÁCS, M. A. – PÁRKÁNYI, B. – REPPA, Z. – VADAS, G. [2003]: N.E.M.: Quarterly Projection Model for Hungary. MNB mimeo.
- JOHANSEN, S. [1988]: Statistical analysis of cointegration vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 12. évf. 2–3. sz. 231–254. old.
- JOHANSEN, S. [1991]: Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in gaussian vector autoregressive models. *Econometrica*. 59. évf. 6. sz. 1551–1580. old.
- KOVÁCS E. [1989]: Idősorok kointegrációja. *Statisztikai Szemle*. 67. évf. 5. sz. 599–619. old.
- KOVÁCS M. A. (szerk.) [2002]: A Balassa-Samuelson-hatás becslült mértéke 5 közép- és kelet-európai országban. *MNB Füzetek* 2002/5. Elektronikus elérhetőség: www.mnb.hu

- KIRÁLY J. [1989]: *Fogyasztás és megtakarítás: empirikus modellek*. Kandidátusi disszertáció.
- KIRÁLY J. – KÖRÖSI G. [1990]: *Consumption, housing, and money demand – Error correction models for Hungary*. Az Econometric Society European Meeting 1990, Barcelona, konferencián előadott tanulmány.
- KÖRÖSI G. – MÁTYÁS L. – SZÉKELY I. [1990]: *Gyakorlati ökonometria*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest.
- LINDBECK, A. [2001]: The Sveriges Riksbank (Bank of Sweden) prize in economic sciences in memory of Alfred Nobel 1969–2000. In: *Levinovitz, A. W. – Ringertz, N.* (szerk.) *The Nobel Prize: the first 100 years*. Imperial College Press and World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Elektronikus elérhetőség: <http://www.nobel.se/economics/articles/lindbeck/index.html>
- MANGANELLI, S. – ENGLE, R. F. [2001]: *Value at risk models in finance*. ECB Working Paper No. 75. Elektronikus elérhetőség: www.ecb.int
- MELLÁR T. – RAPPAI G. [1998]: Az infláció a gazdaságpolitika szolgálatában. *Statisztikai Szemle*. 76. évf. 11. sz. 885–896. old.
- NEMÉNYI J. [1994]: A strukturális változások kezelése az átmenet gazdaságának ökonometriai modelljeiben. *Közgazdasági Szemle*. XLI. évf. 11. sz. 967–988. old.
- NELSON, CH. R. – PLOSSER, CH. I. [1982]: Trends and random walks in macroeconomic time series. *Journal of Monetary Economics*. 10. évf. 2. sz. 139–162. old.
- PAFKA SZ. – MÁTYÁS L. [2001]: *Multivariate diagonal FIGARCH: Specification, estimation and application to modelling exchange rates volatility*. Central European University Economics working paper WP5/2001, elektronikus elérhetőség: http://www.ceu.hu/econ/economic/szilard_ceuw.pdf
- PALÁGYI Z. [1999]: Árfolyamingadozások és kockázatbecslés a Budapesti Értéktőzsdén. *Sigma*. 30. évf. 1–2. sz. 27–32. old.
- PALÁGYI Z. [2003]: Pénzügyi idősorok elemzése a Lévy-hatvány GARCH-moddal. *Statisztikai Szemle*. 81. évf. 7. sz. 571–587. old.
- PHILLIPS, A. W. [1957]: Stabilization policy and the time forms of lagged responses. *Economic Journal*. 67. évf. 266. sz. 265–277. old.
- PHILLIPS, P. C. B. [1986]: Understanding spurious regressions. *Journal of Econometrics*. 33. évf. 3. sz. 311–340. old.
- PHILLIPS, P. C. B. [1987]: Time series regression with a unit root. *Econometrica*. 55. évf. 2. sz. 277–301. old.
- POON, S.-H. – GRANGER, C. W. J. [2003]: Forecasting volatility in financial markets: a review. *Journal of Economic Literature*. XLI. évf. június. 478–539. old.
- The Royal Swedish Academy of Sciences* [2003]: Time-series econometrics: cointegration and autoregressive conditional heteroskedasticity. Advanced information on the Bank of Sweden Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel. www.nobel.se
- SARGAN, J. D. [1964]: Wages and prices in the United Kingdom: a study in econometric methodology. In: *Hart, P.E. – Mills, G. – Whittaker, J. N.* (szerk.) *Econometric analysis for National Economic Planning*. Butterworths. London.
- ULBERT J. – RAPPAI G. [2002]: Globalizáció az értékpapírpiacon. *Statisztikai Szemle*. 80. évf. 3. sz. 833–846 old.
- VARGA J. [2001]: Pénz- és tőkepiaci idősorok sztochasztikus volatilitás modellje. *Sigma*. 32. évf. 1–2. sz. 69–84. old.
- VARGA J. – RAPPAI G. [2002]: Heteroscedasticity and efficient estimates of BETA. *Hungarian Statistical Review*. Special number 7. 126–137. old.
- VÁRPALOTAI VIKTOR [2003]: Dezaggregált költségbegyűrűzés-alapú ökonometriai infláció-előrejelző modell. *MNB-Füzetek*. 2003/4. Elektronikus elérhetőség: www.mnb.hu

SUMMARY

The Royal Swedish Academy of Sciences indicated two main contributions to Economic sciences in awarding the Nobel Prize in Economics 2003. The prize was awarded to Robert F. Engle “for methods of analyzing economic time series with time-varying volatility (ARCH)”, and to Clive W. J. Granger “for methods of analyzing economic time series with common trends (cointegration)”. This paper describes these two methodologies and some of their extensions, and presents some applications to Hungarian time series. At the end of the article we list some of the other contributions of the laureates to Econometrics.