A LOGISZTIKUS FÜGGVÉNY ÉS A LOGISZTIKUS ELOSZLÁS

HUNYADI LÁSZLÓ

A tanulmány áttekintést ad egy mára már kissé divatjamúlt, ám még mindig hasznos statisztikai eszközről, a logisztikus függvényről és a logisztikus eloszlásról. Bemutatja a determinisztikus trendszámítások egyikeként használt logisztikus függvény származtatását, értelmezését, jellemző vonásait és paraméterbecslési eljárásait. Nagy súlyt helyez a logisztikus függvény kapcsolódásaira a többi növekedési függvénnyel, a hólabdának nevezett diszkrét terjedési folyamattal és a logisztikus eloszlással, valamint a logisztikus regresszióval. A tanulmány a szakirodalomból jobbára ismert tényeket próbál más megvilágításba helyezni, így elsősorban történeti és didaktikai szempontból tarthat számot érdeklődésre.

TÁRGYSZÓ: Trendszámítás. Sztochasztikus folyamatok. Logit.

A logisztikus függvény az elmúlt időszakban – elsősorban a sztochasztikus idősorelemzési módszerek domináns elterjedésével – sokat vesztett népszerűségéből, holott jelentősége alig csökkent. Fontos megemlíteni, hogy a hagyományos logisztikus függvény egyrészt szoros rokonságot mutat más, elsősorban leíró-interpolációs célokra alkalmazott modellekkel, másrészt előállítható sztochasztikus párja is, ami kényelmesen alkalmazható idősoros vizsgálatokra. Tekintve, hogy a logisztikus függvény valójában egy eloszlásfüggvény, így ez alapján a széles körben alkalmazható logisztikus eloszlás is adott; ugyanakkor az, hogy eloszlásról van szó, segíthet a logisztikus (eloszlás)függvény paramétereinek becslésében.

A tanulmány azt a célt tűzte ki maga elé, hogy némiképp letörölje a port a logisztikus függvényről: összefoglalja mindazokat az eredményeket, amelyek ma is hasznosíthatók, rámutat – mintegy történeti érdekességként – a modellalkotás és a paraméterbecslés korai módjaira és problémáira, ugyanakkor áttekinti azokat a módszereket és területeket, amelyekkel és ahol ma is aktuális a logisztikus függvény és származékainak alkalmazása. Ennek megfelelően először bemutatja magát a logisztikus modellt, annak tulajdonságait, paramétereinek jelentését. Ezt követően megvizsgálja a modell diszkrét sztochasztikus változatát, annak az eredeti modellel való kapcsolatát, valamint a kettő rokonságából adódó Gompertz-függvényt. Ezután összegzi a logisztikus eloszlással kapcsolatos legfontosabb tudnivalókat és az eloszlás néhány kiterjesztését. Meglehetősen terjedelmes rész foglalkozik a paraméterbecslés kérdéseivel, majd végül összefoglaljuk a bemutatott eszköztár legfontosabb alkalmazási területeit.

1. A LOGISZTIKUS FÜGGVÉNY (ALAPMODELL)

A logisztikus függvény kezdetben a XX. század első felében zajló statisztikai-ökonometriai modellezés egyik fontos eszköze volt. Mai fogalomhasználatunk szerint egy determinisztikus trendmodell alapfüggvényének neveznénk, amely telítődéses folyamatok hosszú távú, időbeli lefutását volt hivatott leírni. A kezdeti, szinte kizárólag lineáris modellezést elég hamar követte az állandó növekedési ütemű fejlődést leíró exponenciális és hatványkitevős függvények alkalmazása, s ezt ugyancsak rövid időn belül követte az a felismerés, hogy „a fák nem nőnek az égig": jóllehet egy exponenciális világban nagyon szép elméleti összefüggések teljesülnek, és logikailag nagyon vonzó, zárt rendszert lehet exponenciális függvényekből felépíteni, de a jellemző módon állandó ütemű növekedés hosszabb távon sem a természetben, sem a népességben, sem a gazdaságban, sem nagyon sok más területen nem tartható feltevés. A folyamatok gyakori jellemzője, hogy egy ideig (csaknem) állandó ütemben nőnek, majd egy idő után elérik azt a szakaszt, amikor a növekedés korlátai már éreztetik hatásukat, és ennek eredményeképp a növekedés üteme érezhetően csökken, 0-hoz tart. Így az állományi szemléletben felfogott folyamat egy elnyújtott S görbéhez hasonló trenddel jellemezhető.

Ilyen, ún. növekedési függvényeket viszonylag könnyű készíteni (elegendő arra gondolnunk, hogy jószerivel valamennyi folytonos eloszlásfüggvény *formailag* hasonlóan viselkedik). Kezdetben használtak is többféle növekedési függvényt (normális eloszlás eloszlásfüggvénye, Johnston-görbe stb.), ám ezek közül kiemelkedett, és szinte egyeduralkodóvá vált ezen a téren a logisztikus függvény, amelynek alakja eredendően:

$$y_t = \frac{k}{1 + ae^{-bt}} \qquad /1/$$

volt, $k, a, b > 0$ paraméterkorlátozásokkal. Később több, ettől eltérő paraméterezést is használtak, ezek mind a függvény más és más tulajdonságát hangsúlyozták (részletes áttekintésükre a jelen írás keretei nem adnak módot). A továbbiakban az /1/-től egy kicsit eltérő parametrizálást fogunk használni:

$$y_t = \frac{k}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 t)}, \qquad /2/$$

amelyik természetesen megfeleltethető az /1/ formának, amennyiben az $a = \exp(\beta_0)$ és $b = -\beta_1$ helyettesítéseket elvégezzük. Ekkor az újonnan bevezetett paraméterek lehetséges értéktartománya: $k > 0$, β_0 tetszőleges, és $\beta_1 < 0$. (Megjegyezzük, hogy a *k* és a β_1 elvben felveheti a 0 értéket, de akkor a feladat triviálisan semmitmondóvá válik, ezért alkalmazzuk a szigorú egyenlőtlenséget.)

A függvény tulajdonságai ezek után jól meghatározhatók. Ha *t* időváltozót a $(-\infty, +\infty)$ tartományban engedjük mozogni, akkor függvénydiszkusszióval könnyen beláthatók az alábbi tulajdonságok:

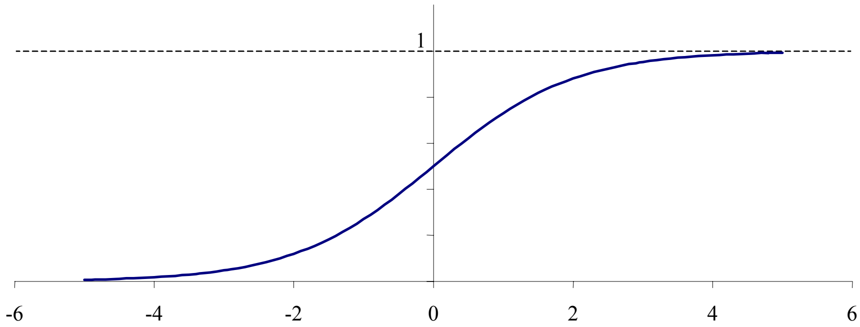
– $0 < y_t < k$, azaz a függvény a $(0, k)$ intervallumban vesz fel értékeket;
– monoton növekvő;

– határértékei 0, illetve k;

– a $t = -\dfrac{\beta_0}{\beta_1}$ helyen van inflexiós pontja.

Alakját az 1. ábra mutatja.

1. ábra. A természetes logisztikus függvény alakja



Az 1. ábrán egy $y_t = \dfrac{1}{1+\exp(-t)}$ függvényt ábrázoltunk, azaz az általános formában a $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -1$ paraméterezést választottuk. A későbbiekben ezt az egyszerű formát fogjuk *természetes logisztikus függvénynek* nevezni.

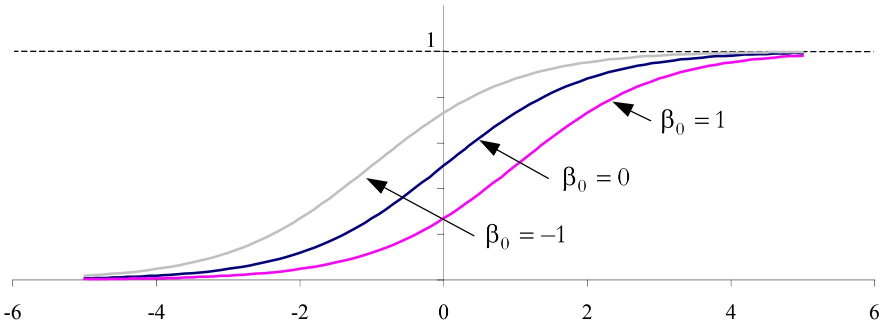
A paraméterek jelentése a /2/ forma alapján meglehetősen szemléletes:

– A k paraméter az ún. telítődési paraméter (szaturációs szint), amely azt a határt jelenti, ameddig a folyamatot leíró y_t változó elmehet. Emlékeztetünk arra, hogy a logisztikus függvény alapvetően természetes felső korláttal rendelkező, telítődési folyamatok leírására szolgál. Ilyen például valamely fogyasztási cikk állománya, amelynek legalábbis bizonyos feltételek mellett felső határt szab a háztartások száma. Korábban a lakosság tulajdonában lévő személygépkocsik számának időbeli alakulása igen jól leírható volt logisztikus függvénnyel, ám a motorizáció fejlődésével – amióta nem ritka a háztartásonkénti 2 vagy több gépkocsi – már nem működik így. Ilyen esetekben egy másik, részben hasonló tartalmú változó (például ebben az esetben a személygépkocsival rendelkező háztartások aránya az összes háztartáson belül) használható. Megjegyzendő, hogy ebben az esetben a k értéke természetesen a 1 lesz, ami egyrészt indokolja a logisztikus függvénynek azt a szintén gyakran használt kétparaméteres formáját, amelyben k rögzítve van 1-re, másrészt lényegesen egyszerűsíti a becslési problémákat. Értelmezésénél érdemes megemlíteni, hogy mivel a függvény értéke az inflexiós pontban $k/2$, a k paraméter növelése azt is jelenti, hogy egyre később éri el a függvény a fordulópontot, egyre tovább viselkedik (megközelítőleg) úgy, mint egy exponenciális függvény. Mivel k a növekedés korlátját jelenti, ha ezt végtelenbe tarttatjuk, a növekedés a korlátozás nélküli esethez fog hasonlítani. (Ezek a tulajdonságok kiváltképp jól láthatók a következő fejezetben bemutatandó hólabda folyamaton.)

– A β_0 paraméter valamiféle eltolási paraméter, de természetesen nem a szokásos egyszerű (lineáris) értelemben. Minden más változatlansága mellett növekedése jobbra tolja el a görbét. Az eltolás mértéke legjobban az inflexiós ponton mérhető le: ott a görbét $-1/\beta_1$ mértékkel tolja el.

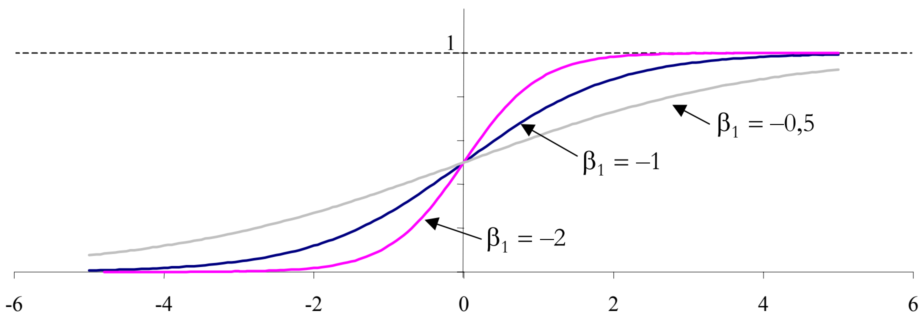
– A β_1 paraméter az alakparaméter: növekedése (abszolút értékben) meredekebbé teszi a függvényt, nagyobb β_1 esetén hamarabb közelíti meg a telítődési szintet. Megjegyzendő, hogy mivel az inflexiós pont helye függ mindkét paramétertől, a β_1 elmozdítása ezt is érinti, tehát eltolást is végez. A két paraméter szerepe talán úgy írató le leginkább, hogy β_0 alapvetően *helyzet-* (elhelyezkedési) paraméter, de érinti a meredekséget is, a β_1 pedig alapvetően alakparaméter, de az *alak* változtatásán keresztül bizonyos értelemben érinti a *helyzetet* is. (A paraméterek szerepének jobb megértésére javasoljuk az Olvasónak, hogy próbáljon kirajzolni különböző paraméterértékekkel rendelkező logisztikus függvényeket, és ebből vonja le saját következtetéseit. Ez Excel programmal könnyen megvalósítható.)

2. ábra. Logisztikus függvény különböző eltolásparaméterekkel
$(\beta_1 = -1)$



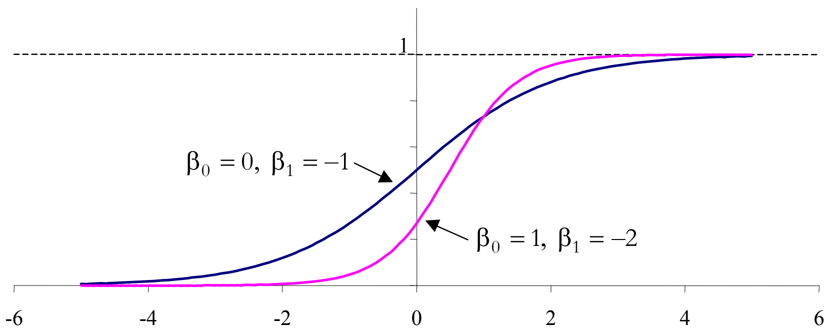
A 2. ábrán az alapesetet reprezentáló természetes logisztikus függvény $(\beta_0 = 0)$ mellett a $\beta_0 = 1$ és a $\beta_0 = -1$ esetet is ábrázoltuk.

3. ábra. Logisztikus függvény különböző meredekségi paraméterekkel
$(\beta_0 = 0)$



A 3. ábrán a természetes logisztikus függvény mellett a $\beta_0 = 0$ megtartásával különböző meredekségi paraméterek esetén mutatjuk be a logisztikus függvényt: az alapesetben $\beta_1 = -1$, a két másik ábrán $\beta_1 = -2$ és $\beta_1 = -0{,}5$ paraméterezéssel. Végül a 4. ábrán az alapeset mellett a $\beta_0 = 1$ és $\beta_1 = -2$ paraméterválasztás hatását mutatjuk be.

4. ábra. Természetes és általános logisztikus függvény



A logisztikus függvény tulajdonságainak jobb megértésére bemutatjuk a függvény még egy további fontos tulajdonságát, amely egyben adalék a logisztikus modell származtatásához is. Ehhez készítsük el a /2/ alakú függvény *t* szerinti deriváltját, és ezt alakítsuk át egyszerű elemi lépésekkel:

$$\frac{\partial y_t}{\partial t} = \frac{-\exp(\beta_0 + \beta_1 t)\cdot \beta_1 \cdot k}{\left[1+\exp(\beta_0+\beta_1 t)\right]^2} = \frac{-\beta_1 \cdot k}{1+\exp(\beta_0+\beta_1 t)} \cdot \frac{\exp(\beta_0+\beta_1 t)}{1+\exp(\beta_0+\beta_1 t)} =$$
$$= \frac{-\beta_1 \cdot k}{1+\exp(\beta_0+\beta_1 t)} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+\exp(\beta_0+\beta_1 t)}\right) = -\beta_1 y_t \left(1 - \frac{y_t}{k}\right) = -\frac{\beta_1}{k} y_t (k - y_t).$$

A kapott alakot „szimmetrikussá” tehetjük, és így kapjuk meg azt a formát, amit a szakirodalom *Robertson*-féle differenciálegyenletnek nevez:

$$\frac{\partial y_t}{\partial t} = -\frac{\beta_1}{k}(y_t - 0)(k - y_t). \qquad /3/$$

A /3/ forma szemléletesen mutatja a logisztikus függvény tulajdonságait: olyan növekedést ír le, amelynek *üteme* egyenesen arányos az alsó szinttől (0) és a felső szinttől (*k*) való távolsággal. Jól látható ebből az is, hogy a növekedési ütem a 0 közelében, és a *k* közelében kicsi, legnagyobb értékét pedig akkor veszi fel, amikor mindkét aszimptotától egyenlő távolságra van (azaz az inflexiós pontban). Az is látható, hogy a növekedési ütem ceteris paribus egyenesen arányos a β_1 paraméter abszolút értékével, és *közvetlenül nem*, csak közvetve függ a β_0 értékétől.

Végül megjegyezzük, hogy a függvény elvben bővíthető lenne egy harmadik (mondjuk $\beta_2 > 0$) additív paraméterrel, ami y_t -t tolná el függőleges irányban. Ennek a paraméternek az lehetne a jelentése, hogy a folyamat csak bizonyos pozitív értékeknél kezdődhet, ahogy természetes felső, úgy természetes alsó korlátja is van. Ez az eredeti gondolat természetes kiterjesztése lenne, azonban ezzel a szakirodalom nem foglalkozik.

2. A HÓLABDA FOLYAMAT

A hólabda folyamat egy régi és gyakran újra és újra felmerülő játék (régebben hólabdának nevezték, manapság pilótajátéknak) leírása. Valójában terjedést modellez zárt közegben: azt írja le, hogy egyszerű terjedési szabályok esetén egy tulajdonság (információ, tartós fogyasztási cikk vásárlása, divatáru birtoklása, fertőző betegség stb.) időben miként terjed szét a közegben. A hasonló modelleket, folyamatokat szokták diffúziós modelleknek is nevezni. Ezek egyik változata a hólabda modell (*Hunyadi* [1978]).

Az alapmodell lényege az, hogy feltételez egy zárt (*N* elemű, azaz véges elemszámú) sokaságot (például egy város népessége), feltételezi, hogy indulásként a sokaság s_0 $(s_0 > 0)$ számú eleme rendelkezik a nevezett tulajdonsággal, és azt egységnyi idő alatt egy további elemnek adja tovább. A játékszabályokhoz hozzá tartozik, hogy azok az elemek, amelyek már rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal („fertőzöttek”) ezt megtartják, tehát ha ilyen elemek kapják meg az információt (fertőzést stb.), akkor ezzel nem növekszik a fertőzöttek száma. A feladat az, hogy leírjuk, miként alakul az egyes diszkrét időpontokban a fertőzöttek száma.

Mielőtt a rövid formális tárgyalásra rátérnénk, csupán intuitíve kövessük végig a modell logikáját! Kezdeti állapotban, amikor egy, vagy csak kis számú fertőzött elem van a sokaságban, a továbbadások sikeresek, hiszen ha véletlenszerűen kerülnek kiválasztásra azok az elemek, amelyek majd megkaphatják a fertőzést, nagy lesz a valószínűsége, hogy még „tiszta” elemeket találnak. Ekkor tehát az új fertőzések száma egyre nagyobb lesz (majdnem exponenciális függvény szerint nő), és a teljes fertőzött állomány is gyorsan nő. Amint előrehalad azonban a folyamat, és nő a fertőzött állomány, úgy egyre kisebb valószínűséggel fertőződik meg olyan elem, amelyik még tiszta volt, hiszen a már megfertőzöttek száma nagy. Ekkor egyre inkább érezni lehet a telítődés hatását: az állomány (fertőzött állomány) növekedése meglassul és lassan aszimptotikusan tart a felső korlátot jelentő teljes sokasági elemszámhoz. Ebből a rövid verbális leírásból is látható, hogy valamilyen, a logisztikus függvénnyel korábban leírt telítődési folyamatról van ezúttal is szó, jóllehet a korábbiaknál jóval pontosabb kiinduló feltételekből származtatjuk a megoldást.

A formális leírást csak röviden mutatjuk be; az érdeklődők a részleteket egy korábbi tanulmányban (*Hunyadi* i.m.) megtalálhatják. A fent leírt feltételekből azonnal adódik, hogy az 1. időpontban a fertőzöttek számát egyszerűen az

$$s_1 = s_0 + s_0 - g_0 \qquad /4/$$

összefüggés írja le, ahol g_0 egy valószínűségi változó, amely azt mutatja meg, hogy hány olyan elem kapta meg az első lépésben a fertőzést, aki már fertőzött volt. Belátható, hogy $E(g_0)=\frac{s_0^2}{N}$, így az első lépés után a fertőzöttek számának feltételes várható értékét az $E(s_1 \mid s_0)=2s_0-\frac{s_0^2}{N}$ összefüggés írja le. Tovább folytatva a fertőzést, a *t*-edik időszak végére a fertőzöttek számának várható értékére az

$$E(s_{t+1} \mid s_t)=2s_t-\frac{s_t^2}{N} \qquad /5/$$

forma adódik. Ekkor, ha bevezetjük a 0 várható értékű ε_t eltérésváltozót, akkor a folyamatot egy determinisztikus és egy sztochasztikus komponensre bontva azt kapjuk, hogy

$$s_{t+1}=2s_t-\frac{s_t^2}{N}+\varepsilon_t\,, \qquad /6/$$

és a determinisztikus komponens egy nemlineáris differencia-egyenlet formájára írható át:

$$\Delta s_t=s_{t+1}-s_t=s_t-\frac{s_t^2}{N}=\frac{s_t}{N}\left(N-s_t\right). \qquad /7/$$

A fentiekhez kívánkozik néhány megjegyzés. Egyrészt az /5/ alak és a /6/ forma nem ekvivalensek, hiszen az /5/-ben a várható érték feltételes a megelőző állapotra, míg /6/ esetén nem. Másrészt azonban arra is fel kell hívni a figyelmet, hogy a /6/ sem tekinthető egy determinisztikus trend implicit differenciaegyenletének, hiszen a *t*-edik időszakban megjelenő véletlen komponens beépül az s_{t+1} eredményváltozóba, és öröklődik a következő időszakra, azaz a mindenkori véletlen komponens a folyamat alkotó részévé válik.

A /7/ differencia-egyenlet explicit megoldása

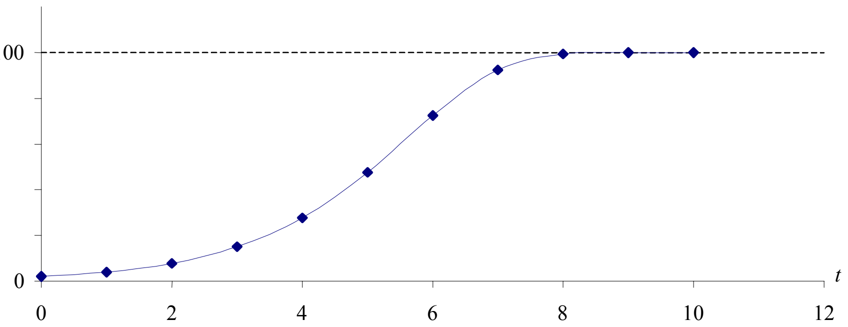
$$s_t=N\left[1-\left(1-\frac{s_0}{N}\right)^{2^t}\right] \qquad /8/$$

alakú (lásd *Hunyadi* [1978]). A /8/ függvényt diszkutálva azt tapasztaljuk, hogy a függvény:

- s_0 és N közt vehet fel értékeket;
- monoton növekvő;
- a felső határt aszimptotikusan közelíti.

Alakját $N=100$ és $s_0=2$ esetén néhány *t*-re az 5. ábrán mutatjuk be.

5. ábra. *A hólabda folyamat lefutása*



Ez a függvény is a logisztikushoz hasonló, ún. növekedési függvény, a Gompertz-függvények egy speciális esete.

Az alapmodell némiképp reálisabbá tehető, ha nem azt feltételezzük, hogy egy-egy fertőzött elem időegység alatt 1, hanem általában $n \geq 1$ további elemnek adja tovább a fertőzést. Ekkor a növekedés differenciaegyenlete a korábbiak alapján azonnal megkapható, hiszen

$$s_{t+1} - s_t = ns_t - \frac{n}{N} s_t^2 = \frac{n}{N} s_t \left(N - s_t\right), \qquad /9/$$

aminek értelmezésére később rátérünk. Bár a /9/ forma már csupán abból adódóan, hogy több paramétert tartalmaz mint /7/, rugalmasabban alkalmazható, explicit megoldását azonban mindezidáig nem sikerült előállítani. Ugyanakkor ez a differenciaegyenlet forma számottevő összehasonlításokra ad lehetőséget.

Az összehasonlítások alapja az, hogy a /7/, de kiváltképp a /9/ differenciaegyenletek formailag igen hasonlatosak, tartalmilag pedig lényegében véve azonosak a /3/ Robertson differenciálegyenlettel. Ezért a következők állíthatók:

– A logisztikus függvény által, illetve a hólabda terjedési modell által leírt folyamatok közt szoros rokonság van: utóbbi az első diszkrét időpontokra felírt analógjaként tekinthető.

– Ennek megfelelően a logisztikus és a Gompertz-függvények között is közelebbi kapcsolat van, mint amennyi a formai hasonlóságból következne.

– Amellett, hogy a logisztikus függvény és a hólabda modell tartalmilag azonos jelenséget ragadnak meg, nem szabad elfeledkezni arról, hogy az alkalmazások során a logisztikus függvényt mint egy determinisztikus trendmodell egyik komponensét azonosítottuk, ezzel szemben a hólabda modell sztochasztikus idősormodell, abban az értelemben, hogy a véletlen változó nem egy előre kijelölt pálya mentén alakuló trendhez adódik hozzá, hanem az autoregresszív egyenleten keresztül időpontról időpontra a folyamatba beépülő szerves alkotó elem.

– A /3/ és a /9/ egyenletek összevetése világosan mutatja az eredeti logisztikus modell β_1 paraméterének tartalmát: az n-nel analóg módon a terjedés sebességét jelenti, ilyen értelemben valóban a függvény alakparamétere.

– Végül megmutatunk még egy kapcsolatot, amely jól rávilágít a két modell közös, illetve eltérő vonásaira.

Ehhez abból indulunk ki, hogy a logisztikus függvényt diszkrét pontokra felírva egyebek közt a következő alak kapható:

$$y_{t+1} = \left(\frac{1-e^{-\beta_1}}{e^{-\beta_1}} + 1 \right) y_t - \frac{1}{k} \left(\frac{1-e^{-\beta_1}}{e^{-\beta_1}} \right) y_t y_{t+1} \ . \qquad /10/$$

Ha ezt összevetjük a hólabda modell

$$s_{t+1} = (n+1) s_t - \frac{n}{N} s_t^2 \qquad /11/$$

alakjával, akkor az $n = \frac{1-e^{-\beta_1}}{e^{-\beta_1}} = e^{\beta_1} - 1$ és az $N = k$ megfeleltetéssel látható, hogy eltérés csak az $y_t \cdot y_{t+1}$ és a neki megfelelő $s_t^2 = s_t \cdot s_t$ közt van. Ez jól láthatóan arra utal, hogy ha a t és a $t+1$ közel vannak egymáshoz, azaz sűrűk a megfigyelések, akkor a két folyamat is közel kerül egymáshoz, azaz a diszkrét és a folytonos folyamatok átmehetnek egymásba. Ugyanakkor a paraméterek megfeleltetésében adódó eltérések figyelmeztetnek az átmenetek korlátaira, illetve arra, hogy amennyiben az egyszerű összehasonlításnál, illetve analógiánál mélyebb összefüggéseket keresünk, akkor pontosan kell definiálnunk a határátmenetek feltételeit.

3. A LOGISZTIKUS ELOSZLÁS

A logisztikus függvény sokkal előbb polgárjogot nyert a korai ökonometriai-statisztikai modellezésben, mint a logisztikus eloszlás, holott a kettő szorosan összetartozik. A logisztikus függvény ugyanis felfogható egy eloszlásfüggvénynek (tulajdonságai erre alkalmassá teszik), és azt a folytonos eloszlást, amelynek a logisztikus függvény az eloszlásfüggvénye, logisztikus eloszlásnak nevezzük.

Legyen kiindulópontunk a korábban bevezetett természetes logisztikus függvény, amely itt csak annyiban különbözik az eddig használttól, hogy a t időváltozót egy x változóra cseréljük, azaz a vizsgált eloszlásfüggvény

$$Pr(X < x) = F(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)} \qquad /12/$$

alakú lesz, ahol $-\infty < x < \infty$. A függvény folytonos és minden pontjában deriválható, így a sűrűségfüggvény is könnyen előállítható:

$$f(x) = \frac{\exp(-x)}{\left(1+\exp(-x)\right)^2} \ . \qquad /13/$$

Ezzel az eloszlást valójában teljesen specifikáltuk. Az eloszlás tulajdonságai közül beláthatók (*Johnson–Kotz* [1970]) az alábbiak:

– várható értéke $E(X)=0$;

– varianciája $Var(X)=\frac{\pi^2}{3}$;

– az eloszlás szimmetrikus az $x=0$ tengelyre, módusza és mediánja egyaránt 0, alakja pedig a normális eloszlás haranggörbéjére emlékeztet.

Mielőtt tovább vizsgálnánk az eloszlás tulajdonságait, érdemes bemutatni a logisztikus eloszlás egy másik származtatását, amely kapcsolódik a más kontextusban manapság gyakran használt fogalomhoz, a *logithoz.* Ez a másik út a logisztikus eloszlás származtatásához a következő.

Legyen $X \sim U(0,1)$ változó, és legyen Y a logitja, azaz $Y=\log(\frac{X}{1-X})$. Ekkor X sűrűségfüggvénye $f_X(x)=1$, és a transzformált változó sűrűségfüggvénye

$$f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\cdot|J|,$$

ami esetünkben a következőképpen származtatható. A jobb oldal első tényezője nyilván 1, míg a másodikhoz először a logit transzformáció inverzét célszerű elkészíteni. Ez egyszerű átalakítások után $X=\frac{\exp(Y)}{1+\exp(Y)}$ alakot ölt, és mivel $|J|=|\frac{\partial x}{\partial y}|=\frac{\exp(y)}{(1+\exp(y))^2}$, a kapott sűrűségfüggvény triviálisan:

$$f_Y(y)=\frac{\exp(y)}{(1+\exp(y))^2}=\frac{\exp(-y)}{(1+\exp(-y))^2}, \qquad /14/$$

ami nem más, mint a korábban definiált természetes *logisztikus eloszlás* sűrűségfüggvénye. Ebből könnyen megkaphatjuk (éppen a fent alkalmazott átalakítások megfordításával) az eloszlásfüggvényt is:

$$F_Y(y)=\frac{\exp(y)}{1+\exp(y)}=\frac{1}{\frac{1}{\exp(y)}+1}=\frac{1}{1+\exp(-y)}.$$

Ez a származtatás a logit és a logisztikus függvény kapcsolatát mutatja meg. (Az y változó természetesen ugyanazt a szerepet játssza, mint korábban az x, az eltérő jelölés csak arra utal, hogy transzformáció útján jutottunk az eloszláshoz.)

Ahhoz, hogy rugalmasabb eloszlást kapjunk nyilvánvaló, hogy további paraméterek bevezetésére van szükség. Ez annál is inkább célszerű, mert amennyiben össze kívánjuk vetni a logisztikus és a normális eloszlást, a logisztikus eloszlás standardizált formájára is szükségünk lesz.

Az általános (kétparaméteres) logisztikus eloszlás eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \frac{1}{1+\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)} \qquad /15/$$

alakú, ahol a két paraméter természetesen egyértelműen megfeleltethető korábbi két paraméterünknek, ám ez a forma az eloszlások esetén jobban áttekinthető. Nyilvánvaló, hogy az $\alpha = -\frac{\beta_0}{\beta_1}$ és a $\beta = -\frac{1}{\beta_1}$ választással azonnal visszakapjuk a logisztikus függvénynél bevezetett /2/ formát.

Ez az eloszlás már jóval rugalmasabb, hiszen két paraméterének mozgatásával különböző helyzetet és alakot vehet fel. Belátható (*Johnson–Kotz* [1970]), hogy az eloszlás két legfontosabb momentuma:

$$E(X) = \alpha \text{ és } Var(X) = \frac{\beta^2\pi^2}{3},$$

ami egyben azt is mutatja, hogy az α a centrális tendenciát kifejező helyzetparaméter, a β pedig skálaparaméter. Ez a két momentum talán segít abban, hogy jobban megértsük a logisztikus függvény (eloszlásfüggvény) paramétereinek korábban bemutatott jelentését.

A kétparaméteres logisztikus eloszlás lehetőséget ad arra, hogy elkészítsük a standard (azaz 0 várható értékű és egységnyi varianciájú) logisztikus eloszlás sűrűség-, illetve eloszlásfüggvényét. Ekkor az $E(Y) = \alpha = 0$ és $Var(Y) = \frac{\beta^2\pi^2}{3} = 1$ választás mellett az adódik , hogy

$$F(x) = \frac{1}{1+\exp(-\delta x)} \text{ és } f(x) = \frac{\delta\exp(-\delta x)}{(1+\exp(-\delta x))^2},$$

$$\text{ahol } \delta = \frac{1}{\beta} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cong 1{,}8138. \qquad /16/$$

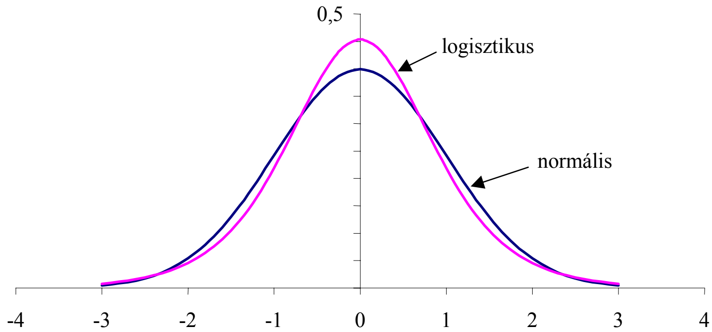
Ez tehát a 0 várható értékű és egységnyi szórású standard logisztikus eloszlás, amelyet olykor $L(0,1)$ módon is szoktak jelölni, s amely már összevethető a standard normális eloszlással. Ezt az összehasonlítást most – nem teljesen egzakt módon – csupán a megfelelően kitáblázott, illetve kirajzolt eloszlás-, valamint sűrűségfüggvény-értékek és csúcsosságmutatók alapján végezzük el.

Az itt következő tábla a két eloszlásfüggvény néhány értékét mutatja be, csak a nemnegatív oldalon (a szimmetria miatt ez elegendő).

y	$F(y)$	$\Phi(y)$
0	0,50	0,50
0,2	0,59	0,58
0,4	0,67	0,66
0,6	0,75	0,73
0,8	0,81	0,79
1,0	0,86	0,84
1,2	0,90	0,88
1,4	0,93	0,92
1,6	0,95	0,95
1,8	0,96	0,96
2,0	0,97	0,98
2,5	0,99	0,99
3,0	1,00	1,00

A 6. ábra a sűrűségfüggvényeket mutatja be:

6. ábra. Standard normális és standard logisztikus eloszlás sűrűségfüggvénye



A tábla és az ábra egyaránt azt sugallja, hogy a két eloszlás alakra nagyon hasonló, bár a logisztikus eloszlás némiképp csúcsosabb. Amennyiben szükséges (és értelmes), egyik a másikkal jól közelíthető.

A csúcsosság (lapultság) elemzésekor először a kvantiliseken alapuló K mutatóhoz fordultunk. Ez, mint ismeretes (*Hunyadi–Vita* [2003]) az interkvartilis félterjedelem, valamint a decilis terjedelem hányadosaként definiálja a lapultsági mutatót, és értéke normális eloszlás esetén $K_{norm} = 0{,}263$. Az ennél nagyobb K mutatóval rendelkező eloszlások lapultabbak, a kisebb K mutatójú eloszlások csúcsosabbak, mint a normális eloszlás[1]. A (standard) logisztikus eloszlás esetén könnyen belátható, hogy a decilis terjedelem éppen kétszerese a kvartilis terjedelemnek, hiszen például az alsó kvartilis számítása az $F(x) = \dfrac{1}{1+\exp(-\delta x)} = 1/4$ egyenlet megoldásából $x = \dfrac{\ln 3}{-\delta}$, az alsó decilisé pedig az

[1] Megjegyzendő, hogy ez a tulajdonság invariáns a normális eloszlás paraméterezésére: valamennyi normális eloszlásnak azonos a K mutatója.

$F(x)=\frac{1}{1+\exp(-\delta x)}=1/10$ megoldásából $x=\frac{\ln 9}{-\delta}$. Így az $\ln 9=\ln 3^2=2\ln 3$ összefüggésből azonnal látszik az állítás. Ezen túlmenően az is azonnal adódik, hogy ez a tulajdonság független δ értékétől, így valamennyi kétparaméteres logisztikus eloszlás esetén $K_{\log}=1/4=0{,}25$. Ez pedig azt jelenti, hogy a logisztikus eloszlás – ahogy azt a 3. ábra is mutatja – kicsivel csúcsosabb a normálisnál.

Kihasználva, hogy valamennyi logisztikus eloszlás csúcsossága azonos, csupán a természetes logisztikus eloszlásra határozzuk meg a momentumokon alapuló mérőszámot. Kimutatható (*Johnson–Kotz* [1970]), hogy ennek negyedik momentuma: $\mu_4=\frac{7\pi^4}{15}$, így a megfelelő mérőszám:

$$\alpha_4=\frac{7\pi^4/15}{\pi^4/9}=\frac{63}{15}=4{,}2>3,$$

hiszen 3 a normális eloszlás megfelelő mutatója. Mivel az α_4 a csúcsosság egyenes mutatója, ez az eredmény megerősíti a korábbiakat, nevezetesen azt, hogy a logisztikus eloszlás – minden hasonlóság mellett – csúcsosabb a normális eloszlásnál.

A jobb áttekinthetőség kedvéért olykor a logisztikus eloszlást átparaméterezik, oly módon, hogy a várható érték paraméter (μ) és a szórás (σ) legyen a két paraméter. Ekkor például a sűrűségfüggvény:

$$f(x)=\left(\frac{\pi}{\sigma\sqrt{3}}\right)\exp\left(\frac{-\pi(x-\mu)}{\sigma\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{1}{\left(1+\exp\left(\frac{-\pi(x-\mu)}{\sigma\sqrt{3}}\right)\right)^2} \qquad /17/$$

alakú lesz.

A logisztikus eloszlás további tulajdonságait (több paraméter alkalmazása, többváltozós logisztikus eloszlás, karakterisztikus- és generátorfüggvénye stb.) a szakirodalom részletesen tárgyalja. Paraméterbecslését és néhány alkalmazását a következő fejezetben mutatjuk be.

4. PARAMÉTERBECSLÉS ÉS ALKALMAZÁSOK

Az eddigiekben áttekintettük a logisztikus függvény és a logisztikus eloszlás fontosabb elméleti tulajdonságait, most az alkalmazásokhoz feltétlen szükséges becsléseket és az alkalmazási lehetőségeket mutatjuk be.

4.1. Kezdeti próbálkozások – a legkisebb négyzetek alkalmazásai

A becslések kapcsán meg kell említeni, hogy a XX. század első harmada/fele volt az az időszak, amikor a logisztikus függvény igazán népszerű volt, ezért nem véletlen, hogy a paraméterbecslésre sok korai becslési eljárás készült, melyek mára már elavultnak tűnnek. Ennek ellenére érdemes ezeket legalább nagy vonalakban áttekinteni, hiszen hozzá tartoznak a logisztikus függvény kérdésköréhez, emellett az egyes módszerek esetenként szellemes és tanulságos ötleteket is bemutatnak. Mivel ekkor a logisztikus függvényt mint determinisztikus trendfüggvényt kezelték, a paraméterbecsléseket a legkisebb négyzetek elve alapján készítették. De még ennél az egyszerű módszernél is adódtak becslési problémák, nevezetesen:

– a függvény nemlineáris paramétereiben és változóiban, ezért a szokásos lineáris technikák csak közvetve alkalmazhatók;
– a függvénynek sok paramétere van, ezek mindegyikének egyidejű becslése identifikációs problémákat vethet fel;
– a paraméterek jelentése meglehetősen kézenfekvő, ezért becslésük gyakran ellentmondhat egyszerű logikai megfontolásoknak (például gyakori az az eset, hogy a felső korlát paraméter (k) becslése nagyobb, mint valamely megfigyelt adat.)

Mindazonáltal a legkisebb négyzeteken alapuló becslések sokáig egyeduralkodók voltak ezen a területen. Ezekből mutatunk most be néhány jellemzőt:

Az első, talán legegyszerűbb módszert nevezzük *logit* módszernek. Ennek lényege, hogy első lépésben kívülről adottnak tekintjük vagy becsüljük (mintán kívüli eszközökkel) a k paraméter értékét. Megjegyezzük, erre olykor nincs is szükség, hiszen már említettük, hogy ez a paraméter néha hiányzik: ha egy részarány időbeli növekedése mutat vélhetően logisztikus tulajdonságokat, a k paraméter természetszerűen adott (például 1) lehet. Ismert k esetén a /2/ függvény két egymás után elvégzett egyszerű transzformációval linearizálható a következők szerint:

$$\frac{y_t}{k} = \frac{1}{1+\exp(\beta_0+\beta_1)}, \quad \frac{k}{y_t} - 1 = \exp(\beta_0 + t\beta_1) \text{ és } \ln\left(\frac{k}{y_t} - 1\right) = \beta_0 + \beta_1 t\,. \qquad /18/$$

Amennyiben a /18/ formát kiegészítjük egy additív és ismert (feltételezett) jó tulajdonságú ε_t véletlen változóval, a legkisebb négyzetek elve alapján a lineáris trendre vagy regresszióra felírt normálegyenletek megoldása útján kaphatunk becslést a β_0 és a β_1 paraméterekre. A módszer felettébb egyszerű, de legalább két hiányossága van. Az egyik az, hogy k-t eleve kiemeli a becslési folyamatból, a másik pedig az, hogy feltételez egy, a többszörösen transzformált alakra jól viselkedő valószínűségi változót. Ezektől eltekintve ez a módszer igen egyszerű, és reguláris esetekben meglepően jó illeszkedéseket produkál.

Még egy megjegyzés kívánkozik ide, ami a választott nevet is indokolja. Ha rögzítjük k-t az 1 értékre (mint láttuk, bizonyos feladatok esetén ez akár természetesnek is tekinthető), és bevezetjük az $y_t = 1 - P_t$ jelölést, akkor a /18/ utolsó egyenlete a

$$\ln\left(\frac{P_t}{1-P_t}\right) = \beta_0 + \beta_1 t \qquad /19/$$

alakot ölti, ami formailag megegyezik a *logit modellel* (amit másként *logisztikus regressziónak* is szoktak nevezni). A logisztikus regresszió, amely a diszkrét eredményváltozós modellezés manapság igen divatos eszköze (lásd például *Hajdu* [2003]), egyszerűen származtatható a logisztikus függvényből, illetve a logisztikus eloszlásból.

A legkisebb négyzetek elvén alapuló paraméterbecslési eljárások közül nagy népszerűségre tett szert Tintner módszere (lásd például *Prékopa–Éltető* [1961]), amelynek elve az, hogy a logisztikus függvény értékeinek reciprokaira illeszt autoregresszív lineáris regressziós modellt. Az eljárás – szemben az előzővel – nem feltételezi a k paraméter ismeretét, és formálisan a következőképpen néz ki.

Tekintsük az

$$\frac{1}{y_{t+1}} = \alpha + \beta \frac{1}{y_t} + \varepsilon_t \qquad /20/$$

egyenletet, ahol tehát a vizsgált változó reciprokát regresszáljuk saját egy időszakkal késleltetett értékeire. Ezek a reciprok értékek a megfigyelések alapján azonnal előállíthatók, így az α és β paraméterek a legkisebb négyzetek elvén, lineáris regressziós paraméterekként könnyen becsülhetők. Ahhoz, hogy a logisztikus függvény eredeti (strukturális) paramétereire vissza tudjunk térni, írjuk fel /20/-et részletesen, már a becsült paraméterekkel!

$$\frac{1+\exp[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(t+1)]}{\hat{k}} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\frac{1+\exp\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t\right)}{\hat{k}},$$

majd átrendezve

$$\frac{1}{\hat{k}} + \frac{\exp\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t\right)\cdot \exp\left(\hat{\beta}_1\right)}{\hat{k}} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\frac{1+\exp\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t\right)}{\hat{k}} = \hat{\alpha} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{k}} + \hat{\beta}\frac{\exp\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t\right)}{\hat{k}} \qquad /21/$$

kapható. Innen azonnal látszik a strukturális és a redukált paraméterek közti megfeleltetés, hiszen

$$\frac{1}{\hat{k}} = \hat{\alpha} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{k}} \qquad \text{és} \qquad \hat{\beta} = \exp\left(\hat{\beta}_1\right), \qquad /22/$$

így a logisztikus függvény eredeti (strukturális) paramétereinek legkisebb négyzetes becslőfüggvényei:

$$\hat{k} = \frac{1-\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} \qquad \text{és} \qquad \hat{\beta}_1 = \ln \hat{\beta}\,. \qquad /23/$$

Látható, hogy a korábban említett problémák (transzformált változók, a becslés ismeretlen tulajdonságai, csak két paraméterre van becslőfüggvény) itt is meg vannak, legfeljebb másként jelennek meg. Jól látható, hogy az egyenletrendszer – az ökonometriában használt fogalommal élve – *alulidentifikált*, azaz a redukált formából nem lehet minden strukturális paraméterre becslőfüggvényt származtatni. Ezért a β_0 paraméterre *Rhodes* (idézi *Prékopa–Éltető* [1961]) egy kiegészítő becslést javasolt. Ennek lényege, hogy a még ismeretlen paraméterre megoldjuk az egyenletet (azaz β_0 -t kifejezzük a megfigyelések és a többi, már becsült paraméter függvényében), és az így kapott formába egy tetszőleges megfigyelést behelyettesítve kapunk becslést a még ismeretlen paraméterre. A becslés hatásossága javul, ha nem egyetlen értéket helyettesítünk be, hanem valamennyi rendelkezésre álló megfigyelésre kiszámítjuk a $\hat{\beta}_0$ becsléseket, és ezek átlagait tekintjük. Ez formálisan a következőképpen néz ki:

$$\beta_0 = \beta_1 t + \ln\left(\frac{k}{y_t} - 1\right),$$

és a becslőfüggvény:

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_1 \frac{n+1}{2} + \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \ln\left(\frac{\hat{k}}{y_t} - 1\right). \qquad /24/$$

A /23/–/24/ becslőfüggvények kényelmesen kezelhetők, könnyen számíthatók, ám tulajdonságaikról szinte semmit sem tudunk. A legkisebb négyzetek módszere eleve nem biztosít sem torzítatlanságot, sem minimális varianciát, de még konzisztenciát sem, de – tekintve, hogy ez esetben is transzformált változóval dolgozunk – még az eltérésváltozóra tett regularitási feltételezések sem biztosítanak automatikusan semmiféle jó tulajdonságot. A tapasztalatok azt mutatják, hogy éppen a linearizáló transzformáció okán előfordulnak esetek, amikor ez a módszer lényegesen rosszabb illeszkedést eredményez, mint az, amelyik transzformáció nélkül numerikusan minimálja egy nemlineáris célfüggvény négyzetösszegét (a későbbiekben még szólunk erről az utóbbi módszerről).

A numerikus eredmények rossz tapasztalatai ösztönözték a kutatókat arra, hogy továbbfejlesszék a legkisebb négyzetek elvére épülő becsléseket. Meg kell említeni, hogy ekkor már a számítógépes korszak kezdetén jártunk, amikor, ha kezdetleges módon is, de lehetőség adódott bonyolult algoritmusok közelítő gépi megoldására. Sok hasonló kísérlet közül *Éltető* és *Hunyadi* [1972] munkáját említjük példaként. Az idézett tanulmányban a szerzők abból indultak ki, hogy az eredeti logisztikus függvényt a paraméterek rögzített kiinduló értékei körül Taylor sorba fejtették, így a lineáris tagokat megtartva a nemlineáris logisztikus függvény helyett annak egy lineáris közelítését kapták. Erre a közelítésre már könnyen alkalmazható volt a legkisebb négyzetek módszere, amely a paraméterek újabb, javított értékeit eredményezte. Az eljárást iteratíve szervezve belátható lépésszám mellett teljesültek a konvergencia numerikus kritériumai, azaz sem a becsült paraméterek, sem pedig a célfüggvény (eltérés négyzetösszeg) nem változott jobban egy előre rögzített kis értéknél. A tapasztalatok azt mutatták, hogy amennyiben a javított Tintner-becslést tekintették a paraméterek kiinduló értékeinek, az iteráció gyorsan és az abszolút minimumhoz konvergált.

Bár ez az eljárás a gyakorlati feladatok esetére jól működött, mégsem ez, hanem az általános nemlineáris szélsőérték-számító algoritmusok és programok oldották meg végleg a problémát. Ismeretes, hogy manapság már lényegileg minden statisztikai programcsomagban hozzáférhető olyan görbeillesztési eljárás, amely tetszőleges függvényre alkalmazható. Az eljárással az illeszkedés kritériumai is választhatók, megválasztható a program által használt numerikus módszer, és természetesen beállítható nagyszámú, a leállást vezérlő kritérium is. Nagy előnyük ezeknek az eljárásoknak, hogy közvetlenül az eredeti nemlineáris függvényből indulnak ki, nem alkalmaznak transzformációkat. Ezek az eljárások tehát az

$$y_t = \frac{\hat{k}}{1+\exp\left(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 t\right)}+e_t$$

alakból indulnak ki, és azokat a becsült paraméterértékeket keresik, amelyek mellett $\sum_{t=1}^{n} e_t^2$ minimális. Méltán állíthatjuk tehát, hogy ezek a programcsomagok a logisztikus függvény paramétereinek becslési problémáit technikailag lezárták, minden korábbi eljárás – köztük az itt bemutatottak is – jószerivel történeti érdekességnek, esetleg didaktikai demonstrációnak tekinthető.

Még mielőtt áttérnénk más becslési elvekre, a legkisebb négyzetek egy másik alkalmazását mutatjuk be, mellyel nem közvetlenül a logisztikus függvényt, hanem annak diszkrét változatából a differenciaegyenletet becsüljük. A becslés kiinduló pontja most a /11/ egyenlet, amit itt megismétlünk:

$$s_{t+1} = (n+1)s_t - \frac{n}{N}s_t^2 \ .$$

Megjegyezzük, hogy bár az eredeti modell diszkrét és egész számú n és N értékekre készült, a két utóbbi paraméter integer voltától az általánosság megsértése nélkül eltekinthetünk. A becslés gondolata igen egyszerű: a másodfokú autoregresszív sémát lineáris regresszióvá transzformáljuk át, ami könnyen megtehető, hiszen a /11/ egyenlet paramétereiben lineáris forma (ellentétben a korábbiakkal, ahol paramétereiben nemlineáris formák okoztak egyebek közt becslési nehézségeket).

Ekkor tehát az $y = s_{t+1}$, $x_1 = s_t$ és $x_2 = s_t^2$ helyettesítéssel felírható az

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \varepsilon$$

konstans nélküli lineáris regresszió, amelyből az α_1 és az α_2 paraméterek gond nélkül becsülhetők, sőt, ha ε-ra teljesülnek a szokásos feltételek, a Gauss–Markov-tétel értelmében a becslőfüggvények legjobb lineáris és torzítatlan (BLUE) tulajdonsággal rendelkeznek. Ha $\hat{\alpha}_1$ és $\hat{\alpha}_2$ ismert, az eredeti (strukturális) paraméterek könnyen megkaphatók:

$$\hat{n} = \hat{\alpha}_1 - 1 \text{ és } \hat{N} = \frac{\hat{\alpha}_1 - 1}{\hat{\alpha}_2}. \qquad /25/$$

Ezzel a becsléssel persze hasonló probléma van, mint a korábbi lineáris becslésekkel: csak két paraméter identifikálható, míg a harmadik a becslésen kívül marad. Ebben az esetben ez kevéssé zavaró, mivel a differencia egyenlet „csak” a növekedésre ad összefüggést, míg a szintparaméter lényegében véve ebben a vonatkozásban indifferens. Amennyiben mégis ezek alapján szeretnénk teljes becslést adni a hólabda folyamatra, a harmadik paramétert, mint induló értéket vagy a megfigyelt idősor első elemeként azonosítjuk, vagy – ha az idősorunk elég hosszú – az első néhány érték átlagaként számíthatjuk. Megjegyzendő, hogy a strukturális paraméterekre származtatott becslések már nem rendelkeznek a BLUE tulajdonsággal, mivel az átmenet (a /25/ visszatranszformáció) nemlineáris műveletet is tartalmaz.

A hólabda modellen alapuló, most ismertetett becslés igen egyszerű, szemléletes, és a korlátozott számú tapasztalat (például *Hunyadi* [1978]) alapján – legalábbis jól viselkedő idősorok esetén – meglehetősen jó illeszkedést eredményez. Mivel ebben az esetben is leíró jelleggel ragadtuk meg a problémát, a becslés további tulajdonságait legfeljebb szimulációs vizsgálatokkal lehetne feltárni, ilyenekre azonban itt nem kerítünk sort.

4.2. A maximum likelihood és a momentumok módszere

Ameddig a logisztikus függvényt mint növekedési függvényt fogtuk fel, leíró elemzést végeztünk, és determinisztikus (és részben) sztochasztikus trendszámítás alapjául használtuk – valójában kívül maradtunk a statisztikai probléma valószínűségi kérdésein. Az azonban, hogy a logisztikus függvény felfogható eloszlásfüggvényként, némiképp más megvilágításba helyezi a kérdést. Legalább két lényeges ponton kell az eddig kifejtetteket valamelyest átértékelni:

– ha eloszlásokról beszélünk, feladjuk az idődimenziót, lemondunk a megfigyelések időbeli rendezettségéből adódó információkról: mindazok a módszerek, illetőleg lépések, amelyek ehhez az időbeliséghez kötődtek (például az autoregresszív felírások), itt nem lesznek használhatók;

– ennek fejében a feladat úgy módosul, hogy megfigyeléseink egy ismert eloszlásból származnak, és a feladat ennek az eloszlásnak a rekonstruálása: sűrűség-, illetve eloszlásfüggvényének paraméterbecslése. Ez a feladat annyiban jelent könnyebbséget, hogy ismert eloszlások esetén a becslések jól bevált módszerei állnak rendelkezésünkre, emellett pedig ezek a módszerek általában már önmagukban utalnak kedvező becslési tulajdonságokra.

Az összehasonlítás azonban így még nem teljes. Egyrészt meg kell jegyezni, hogy a leírt trendmodell esetében is lehetett volna (lehetne) alkalmazni a becslőfüggvény készítésének ezen módszereit (maximum likelihood, momentumok), ám ahhoz a maradékváltozó eloszlását kellett volna specifikálni. Erre a logisztikus függvény esetében nem tettünk kísérletet, elsősorban azért, mert az eddigi eredmények áttekintése történeti szellemű volt, azaz megpróbáltuk felidézni az akkori gondolkodást az akkori módszereken keresztül, ebbe pedig nem fért volna bele az, ha mondjuk a maradékváltozó eloszlásának specifikálásával maximum likelihood becslést készítettünk volna. Némiképp más a helyzet a hólabda modellel: az csak részben fogható fel leíró jellegű trendnek, és éppen származtatása implikálja azt, hogy ebben az esetben a paraméterbecslés során valószínűségi eszközöket is igénybe vegyünk. Ez – jóllehet a problémának talán nincs nagy gyakorlati jelentősége – a közeljövő kutatási feladata lehet.[2]

Még mindig az összehasonlításnál maradva, a mostani feladat (logisztikus eloszlás paramétereinek becslése) annyiban is eltér az eredetitől, hogy ebben az esetben legfeljebb két paramétert kell becsülnünk, hiszen a logisztikus eloszlás általános formája is csak két paramétert tartalmaz. Ezért az eredeti feladat egyszerűsödik.

A leginkább kézenfekvő becslési mód a *maximum likelihood* lehetne. Kiindulva a kétparaméteres logisztikus eloszlás /15/ eloszlásfüggvényéből, vagy az ebből azonnal származtatható sűrűségfüggvényből, közvetlenül felírható a likelihood vagy a log-likelihood függvény. Ezek felírását most mellőzzük, mivel elég terjedelmes, és nem igazán jól használható. A probléma velük kapcsolatban az, hogy a likelihood egyenletrendszer analitikusan nem megoldható, ezért zárt alakban nem készíthető becslőfüggvény a paraméterekre.

Valamelyest ígéretesebb a *momentumok módszere*, hiszen az jól kezelhető eredményekre vezet. A kétparaméteres eloszlás várható értéke ugyanis $E(X)=\alpha$, varianciája pedig $Var(X)=\frac{\beta^2\pi^2}{3}$. Ezeket a paraméterekre megoldva, majd behelyettesítve a mintabeli momentumokat rögtön kaphatók $\hat{\alpha}$ és $\hat{\beta}$ becslőfüggvények: $\hat{\alpha}=\bar{y}$, és $\hat{\beta}=\frac{s^*\sqrt{3}}{\pi}$, ahol $\bar{y}$ a mintaátlag, s^* pedig a mintából számított korrigálatlan szórás. Innen ugyancsak közvetlenül adódik a logisztikus függvény parametrizálásával az, hogy

$$\hat{\beta}_0=\bar{y} \text{ és } \hat{\beta}_1=-\frac{\pi}{s^*\sqrt{3}}. \qquad /26/$$

Ezek a becslőfüggvények a momentumok módszeréből adódóan konzisztensek. Megjegyzendő még, hogy a momentumok általánosított módszerével (GMM) várhatóan ezeknél jobb hatásfokú, ugyancsak konzisztens becslőfüggvények lennének készíthetők, de ezzel a jelen tanulmány nem foglalkozik. Megjegyezzük még, hogy újabban a rendezett mintás becsléseket is jó hatásfokkal használják a logisztikus eloszlásra, de ezek az eredmények külön tanulmányt érdemelnének.

4.3. *Alkalmazások*

A logisztikus függvény klasszikus alkalmazási területe a nemlineáris determinisztikus trendmodellekhez vezet. Mivel telítődési folyamatok leírására szolgál, elsősorban állományi típusú, felső korláttal rendelkező jelenségek időbeli alakulásának leírására hasz-

[2] A korábbiak alapján a Szerző arra számított, hogy a nyilvános publikációk nyomán mások is érdeklődni kezdenek a hólabda és rokonfolyamatai iránt, és ennek kapcsán kialakult volna valamiféle műhelymunka, ahol különböző érdeklődésű és felkészültségű kutatók egymás eredményeit kiegészítve, megvitatva tovább juthattak volna ezen az úton. Sajnos nem ez történt: a hólabda több írásos beszámoló és előadás ellenére sem került be a magyar vagy a nemzetközi kutatások fő áramlatába.

nálták. Jellegzetes alkalmazási példa ebből a körből a rádió- és a tv-előfizetők számának alakulása volt, hiszen ezeknél a változóknál az összes háztartás száma természetes felső korlát volt (az akkor érvényben lévő rendelkezések alapján egy háztartásban elegendő volt egy előfizető, akkor is ha több készüléket használt az adott háztartás). Hasonlóan jól lehetett ezzel az eszközzel modellezni felfutó ágazatok állományi változóit (például létszámadatait, eszközállományukat), és sikeres volt – legalábbis kezdetekben – a tartós fogyasztási cikkek állománya alakulásának logisztikus függvénnyel történő leírása is. Elvben a divatcikkek állománya is logisztikus növekedést mutat, ám az ennek azonosításához szükséges adatbázis általában nem áll rendelkezésre.

A hólabda folyamat hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, ám szemben a determinisztikus trenddel, sztochasztikus trend formájában jelenik meg. A hólabda modell (és rokonai) által vizsgált jelenségek elsősorban terjedési típusúak. Ezért – bár természetesen közelítő módon ez is alkalmazható a korában vizsgált területeken – a hólabda típusú modellek jellegzetesen az egyes populációk létszámának alakulásának, népcsoportok, országok népességállományának leírására, betegségek (fertőzések), hírek, információk terjedésének modellezésére szolgálnak. Elterjedek a biológiai kutatások terén, de mivel a terjedés társadalomban és élettelen közegben egyaránt fontos mozgásforma, alkalmazási lehetőségei más területen is szinte kimeríthetetlenek. Csak példaként említhetjük, hogy a szerző egy korábbi munkájában az árak tovagyűrűzését (árváltozások terjedését) modellezte egy részlegesen szabályozott gazdaságban (*Hunyadi* [1984]), a hólabda modellen és az abból származtatható eloszláson alapuló osztott késleltetésű modell segítségével.

Az időben lejátszódó folyamatokon túlmenően a vizsgált függvények alkalmazhatók – elsősorban simítási és interpolációs céllal – keresztmetszeti elemzésekben is. A demográfusok és a biztosítási szakemberek gyakran használják különböző népesedési és túlélési folyamatok tömör leírására és közelítésére a Gompertz-függvényt és más, itt részletesen nem elemzett, de hasonló tulajdonságokkal rendelkező függvényeket, például a Johnston-görbét (lásd például *Valkovics* [2001]).

A logisztikus eloszlás, mint említettük, egyes alkalmazásokban a normális eloszlás alternatívája. Korábban többen javasolták a normális eloszlás helyettesítésére. Az utóbbi időkben elsősorban az extremális értékek határeloszlásainak modellezésében kap egyre növekvő szerepet. Végül a logisztikus regresszió, amely szintén származtatható a logisztikus eloszlásból, a diszkrét eredményváltozós modellezés és diszkriminálás napjaink egyik kedvelt eszközévé nőtte ki magát.

*

A múlt század első felének egyik népszerű modellezési eszköze, a logisztikus függvény és rokonai mára kimentek a divatból. Ennek ellenére a logisztikus függvény, mint determinisztikus trendfüggvény, annak sztochasztikus párja, a hólabda modell valamint a logisztikus eloszlás sok olyan tulajdonsággal, összefüggéssel rendelkezik, amelyek elsősorban történeti vagy didaktikai szempontból lehetnek érdekesek, de esetenként tanulságokkal szolgálhatnak a mai modellezés számára is. A logisztikus eloszlás és a logisztikus regresszió, amelyek ma is a főáramba tartozó kutatási területek, szintén az említett gyökerekből származtathatók.

IRODALOM

ÉLTETŐ Ö. – HUNYADI L. [1972]: *On the estimation of the parameters of the logistic function.* Paper presented to the ESEM. Budapest.

HAJDU O. [2003[: *Többváltozós statisztikai számítások*. Központi Statisztikai Hivatal. Budapest.

HUNYADI L. [1978]: Egy terjedési folyamat elemzése (A hólabda modell). *Szigma.* XI. évf. 191–209. old.

HUNYADI L. [1984]: Egy terjedési típusú osztott késleltetésű modell. *Szigma.* XVII. 31–46 old.

HUNYADI L. – VITA L. [2003]: *Statisztika közgazdászoknak (második kiadás).* Központi Statisztikai Hivatal. Budapest.

JOHNSON, N. L. – KOTZ S. [1970]: *Distributions in statistics. Continuous univariate distributions*-2. Houghton Mifflin Co. Boston.

KOTZ S. – JOHNSON N. L. (szerk.) [1985] : *Encyclopedia of statistical sciences.* 5. köt. Wiley. New York.

PRÉKOPA A. – ÉLTETŐ Ö. [1971]: *Matematikai jegyzetek IV. Matematikai statisztika.* (Kézirat.) Statisztikai Kiadó. Budapest.

VALKOVICS E. [2001]: A Gompertz-függvény felhasználási lehetőségei a demográfiai modellezésben. *Statisztikai Szemle.* 79. évf. 2. sz. 121–141 old.

SUMMARY

The paper gives an overview of the logistic curve and some related topics which seem to be a bit old-fashioned statistical tool. It presents the derivation, some characteristics and the different estimation methods of the logistic curve and the logistic distribution. Some less known relationships among the logistic curve and other growth curves, the logistic curve and some stochastic processes and the logistic regression are treated. The study has some historical and didactical relevance as well.