Befektetések kockázatának mérése*

Bugár Gyöngyi

PhD, a Pécsi Tudományegyetem egyetemi docense

E-mail: bugar@ktk.pte.hu

Uzsoki Máté,

a Budapesti Műszaki Egyetem hallgatója

E-mail: uzsoki.mate@gmail.com

A tanulmány célja a befektetéselemzés területén hagyományosnak számító és újonnan bevezetett kockázati mérőszámok legfontosabb tulajdonságainak áttekintése, elemzése és használatuk bemutatása. Tanulmányunkban kiemeljük a hagyományosnak mondható kockázati mutatók lényegesebb hibáit és azt, hogy milyen helyzetekben vezethetnek a kockázat jelentős alulbecsléséhez. Emellett ismertetünk olyan mutatókat is, amelyek ezekre a hibákra részleges megoldást nyújtanak. Tanulmányunkban foglalkozunk a közelmúltban elért eredményekkel is, köztük az egyik legígéretesebbnek tűnő kockázati mutató, a feltételes kockáztatott érték (CVaR – Conditional Value at Risk) használatának előnyeivel.

TÁRGYSZÓ:
Pénzügyi alkalmazások, pénz- és értékpapírpiac.

* *Bugár Gyöngyi* köszönetet mond a Magyar Tudományos Akadémiának a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj formájában nyújtott támogatásáért. A szerzők megköszönik továbbá az OTKA (T046371 KGJ) pénzügyi támogatását. Köszönet illeti *dr. Rappai Gábort*, a Pécsi Tudományegyetem dékánját, a tanulmány lektorát és *dr. Hunyadi Lászlót*, a *Statisztikai Szemle* főszerkesztőjét hasznos észrevételeikért.

A pénzügyi befektetések értékelésében a jövedelmezőség becslése mellett döntő jelentőségű a kockázat megfelelő felmérése. Ezt a célt szolgálják a különféle kockázati mutatók, amelyek lehetővé teszik egy befektetési alternatíva, illetve befektetés-kombináció, azaz portfólió kockázatának egyetlen mérőszámmal történő kifejezését. Annak ellenére, hogy a kockázat mérésére szolgáló mutató megválasztásának döntő jelentősége van, mind a mai napig nem ismeretes olyan kockázati mérőszám, amely egyöntetűen elfogadott a szakirodalomban.

A kockázatelemzés témakörében íródott legújabb tanulmányok kétféle megoldást kínálnak: a kutatók egyik része a „legjobb" kockázati mutató megalkotására, illetve kiválasztására törekszik. Erre *Ogryczak–Ruszczynski* [1997], *Jorion* [1999], *Fusai–Luciano* [2000], *Rockafellar–Uryasev* [2002a, 2002b] és *Inui–Kimija* [2005] említhető példaként. A kutatók másik része a releváns kockázati mutatók jellemzésére szolgáló axiómarendszer létrehozására, azaz a kockázati mutatóktól elvárható tulajdonságok és sajátosságok megfogalmazására összpontosít. Ezt a törekvést fémjelzik *Artzner et al.* [1999], *Riedel* [2004] és *Giorgi* [2005] munkái.

A téma iránti folyamatos és élénk érdeklődést valószínűleg az tartja ébren, hogy a kockázat klasszikusnak számító mérőszámairól – mint például a *Markowitz* [1952] által javasolt variancia – bebizonyosodott, hogy bizonyos körülmények között nem megfelelők. Hogy csak a legfontosabb problémát említsük, a befektetések hozamának eloszlása nem szükségképpen szimmetrikus vagy éppen normális, amely számos kockázati mutató korrekt alkalmazásának szükségszerű feltétele.

A kockázati mérőszám megválasztása nagymértékben befolyásolja a létrehozandó befektetési portfólió összetételét, és közvetett módon hatással van az adott befektetés-kombináció kimutatott teljesítményére is. *Jorion* [1999] egy sor pénzügyi katasztrófáról számol be, amelyek a kockázat megfelelő felmérésének hiányából fakadtak. Napjainkra nyilvánvalóvá vált, hogy a *Jorion* [1999] által javasolt kockázati mutató, a kockáztatott érték (VaR – Value at Risk) sem tekinthető bizonyos esetekben megfelelőnek.

A jelen tanulmány célja, hogy áttekintse néhány – szám szerint nyolc – általunk kiválasztott kockázati mutató használatának/használhatóságának és kiszámításának módját. A mutatók kiválasztásánál három szempontra voltunk tekintettel: a kockázati mutatók történeti fejlődésében betöltött fontosság, a korábban használt mutatókkal szembeni problémák kiküszöbölésének képessége és a naprakészség. Az egyes mérőszámok használatával járó előnyök bemutatása mellett igyekszünk feltárni az alkalmazásukkal járó problémákat is. Ugyanakkor szeretnénk megmutatni, hogy a számítástechnika mai fejlettségi fokán még a legbonyolultabbnak tűnő kockázati mutatók kiszámítása sem tekinthető ördöngös feladatnak. A szándékunk az, hogy a gyakorlati alkalmazás lehetőségeire irányítsuk a figyelmet. Tapasztalataink szerint ugyanis a hazai brókercégek és befektetési alapok gyakorlatában még mindig nincs jelen a kockázat elméleti szempontból kifinomult, ugyanakkor a korrekt és érthető befektetői tájékoztatásnak is eleget tevő elemzése és számítása.

1. A kockázat jelentése, a kockázati mutatók csoportosítása

A *kockázat* – az adott probléma természetétől függően, amelyre a fogalmat alkalmazni kívánjuk – többféle módon definiálható. Egy lehetséges általános meghatározás például a következő: „A kockázat az a potenciális kár, amely valamely jelenlegi folyamatból vagy jövőbeli eseményből származik.”[1] Egy speciálisabb, pénzügyi nézőpontból történő megfogalmazás: „A kockázat egy befektetés lehetséges, mérhető vesztesége. Kockázatról akkor beszélhetünk, ha a befektetés eredménye a befektetés kezdetén bizonytalan. Bár bizonytalan az eredmény, de mérhető.”[2] A definíciók alapján a kockázat jelenlétének két döntő sajátossága:

– valamilyen *bizonytalan* jövőbeli eredmény,
– valamely *kedvezőtlen* esemény bekövetkezésének a lehetősége.

A pénzügyi megfogalmazás szerint az említett kedvezőtlen esemény valamilyen mérhető veszteségben ölt testet. Emellett elképzelhető azonban, hogy egy befektető nemcsak a negatív eredményt, azaz a veszteséget, hanem valamilyen előre várt/várható nyereségnél kisebb eredményt is kedvezőtlennek tekint.[3]

A *kockázati mutatók* használatának célja a kockázat számszerűsítése, azaz egyetlen mérőszámmal történő kifejezése. *Albrecht* [2003] a kockázati mutatók két típusát különbözteti meg.

1. Relatív mérőszámok: ezek a kockázatot egy *adott célértéktől való eltérés nagyságá*ként értelmezik. Ebben az esetben nem a célérték vagy önmagukban a megfigyelési értékek elhelyezkedése, hanem az utóbbiaknak az előbbihez viszonyított „helyzete”[4] játszik szerepet a kockázat

[1] A meghatározás forrása: http://en.wikipedia.org/wiki/Risk (fordítás a szerzőktől).
[2] Forrás: https://selco.org/consumer/glossary_savings+investing.asp (fordítás a szerzőktől).
[3] A kockázati mérőszámok egy része éppen ez utóbbit veszi alapul.
[4] Ezt a kifejezést használja *Pflug* [1999, 1. old.], amikor „szóródási mérőszámok”-ról (mint például a variancia) és „helyzetmutatókról” (mint például a várható érték) beszél.

nagyságának meghatározásában. Az előzők alapján a relatív mérőszámokra „helytől független” kockázati mutatókként is szokás hivatkozni.[5]

2. Abszolút mérőszámok: egy adott befektetés megvalósításához vagy adott pénzügyi pozíció megteremtéséhez *szükséges tőkenagysággal* mérik a kockázatot (lásd például *Artzner et al.* [1999] meghatározását). Ebben az esetben a kockázat mértékének meghatározásában döntő szerepet játszik a megfigyelési értékek abszolút nagysága/helyzete, ezért azt mondhatjuk, hogy a mutatók „helyfüggők”.

Tanulmányunkban a következő kockázati mutatókkal foglalkozunk: variancia (V – Variance), szemivariancia (SV – Semi-Variance), átlagos abszolút eltérés (MAD – Mean Absolute Deviaton), Gini-féle átlagos differencia (GMD – Gini’s Mean Difference), kockáztatott érték (VaR – Value at Risk), feltételes kockáztatott érték (CVaR – Conditional Value at Risk), átlagos többletveszteség ($CVaR^+$ – Upper Conditional Value at Risk) és a kockáztatott értéket elérő, átlagos veszteség ($CVaR^-$ – Lower Conditional Value at Risk).[6] Az első négy mérőszám a relatív, míg a második négy az abszolút kockázati mutatók csoportjába tartozik. Természetesen elképzelhető – és valójában létezik is – a kockázati mérőszámoknak ettől eltérő szempontok szerinti csoportosítása. Erről majd még a későbbiekben említést teszünk.

2. Relatív kockázati mutatók

A relatív kockázati mutatók csoportjába a variancia, a szemivariancia, az átlagos abszolút eltérés, valamint a Gini-féle átlagos differencia mutatói tartoznak.

2.1. Variancia (V)

A varianciának a kockázat mértékeként történő használata *Markowitz* [1952] nevéhez fűződik, tehát a modern portfólióelmélet kialakulásával azonos múltra tekint vissza (*Markowitz* [1999]). *Eftekhari–Pedersen–Satchell* [2000] szerint a variancia a pénzügyi világban a legáltalánosabban használt kockázati mutató.

[5] Fontosnak tartjuk kiemelni, hogy a relatív kockázati mérőszámok nem feltétlenül százalékban fejezik ki a kockázat nagyságát, adhatnak eredményül abszolút számot (dollár, forint) értéket is. E mérőszámok „relatív” mivolta abban jut kifejezésre, hogy a megfigyelési értékeknek a célértékhez *viszonyított* helyzetét vesszük alapul a mutató kiszámításánál.

[6] A továbbiakban a mutatókra történő hivatkozásként – a megfelelő helyeken – rövidítéseket használunk. A CVaR és a $CVaR^+$ esetében a *Rockafellar–Uryasev* [2002a] által használt kifejezések magyar megfelelőit alkalmazzuk.

A variancia kiszámítása a jól ismert:

$$V(X) = E(X - E(X))^2 \qquad /1/$$

összefüggéssel, illetve a vele diszkrét esetben ekvivalens

$$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n} \qquad /2/$$

formulával történik. Az előzőkben X a befektetés értékének vagy hozamának megfelelő valószínűségi változót jelenti, X_i az X egy realizált értéke, n pedig X_i lehetséges értékeinek száma (a minta elemszáma). $E(X)$ és $\overline{X}$ az X várható értékét, illetve átlagát jelölik. Gyakran a variancia négyzetgyökét, a szórást használják a kockázat mérésére. Mivel a variancia és a szórás használata az egyes befektetési lehetőségeknek a kockázat szerinti rangsorolásában ugyanarra az eredményre vezet, e két mutatót nem tekintjük különbözőnek.

A variancia kockázati mutatóként történő használatának a legfőbb előnye, hogy segítségével a különböző befektetés-kombinációk, azaz portfóliók kockázata visszavezethető az egyedi befektetések kockázatára. Ezzel a portfólióoptimalizálás, azaz a bizonyos sajátosságoknak megfelelő portfólió összetételének meghatározása analitikusan könnyen lehetséges, egy kvadratikus programozási feladat megoldásával (*Elton–Gruber* [1995]). A variancia előnyei között fontos hangsúlyozni, hogy a vele történő kockázatmérés támogatja a diverzifikációt. Az előzők abban jutnak érvényre, hogy egy portfólió varianciával mért kockázata nem lehet nagyobb az alkotórészeit képező befektetések kockázatának összegénél.[7] A variancia alkalmazásának hátránya ugyanakkor, hogy nincs összhangban a befektetők által a kockázatról alkotott intuitív képpel, miszerint csak azoknak az értékeknek a bekövetkezése „kedvezőtlen” a befektető számára, amelyek a várható értéknél kisebbek. Az /1/ formula szerint a várható értéket meghaladó értékek éppúgy szerepelnek a kockázat mértékének meghatározásában, mint az előbb említett „kedvezőtlen” értékek.

Markowitznak az ún. átlagvariancia-hatékony portfóliók meghatározására szolgáló modelljét[8] sok kritika érte amiatt, hogy alkalmazása csak abban az esetben tekint-

[7] Az alapelv szubadditivitási axiómaként ismert a szakirodalomban (lásd *Artzner et al.* [1999]). Mint ahogy a későbbiekben erről említést teszünk, ez egyáltalán nem magától értetődő tulajdonság, például a VaR kockázati mutató esetében ez a követelmény nem teljesül.

[8] Markowitz ennek kifejlesztéséért kapta meg 1990-ben a közgazdasági Nobel-díjat. A Nobel-díj átvételekor tartott előadása megjelent a *Journal of Finance* hasábjain (lásd *Markowitz* [1991]). Ebben Markowitz beszámol annak a több, mint két évtizedes kutatómunkának az eredményeiről, amellyel az előző – meglehetősen problematikus – érveken túl újabb, empirikusan is alátámasztható érveket sikerült felhoznia modellje használhatóságának igazolása érdekében. Az említett érvek mögött meghúzódó alapgondolat a befektető hasznossági függvényének másodfokú polinommal való közelítése.

hető elméletileg korrektnek, ha a befektető hasznossági függvénye kvadratikus vagy a befektetés hozama normális eloszlású. *Eftekhari–Pedersen–Satchell* [2000] a normális eloszlás helyett egy általánosabb eloszláscsaládot, az ún. elliptikus eloszláscsaládot[9] említik annak feltételeként, hogy a kockázat a variancia segítségével egzakt módon mérhető legyen. *Szegő* [2005] kimutatta, hogy a hozamok elliptikus eloszlása minden olyan kockázati mutató alkalmazhatóságának alapfeltétele, amely a hozamok közötti kapcsolat mérésére a lineáris korrelációs együtthatót használja. *Szegő* [2005] az elliptikus eloszlású valószínűségi változóra példaként a normális eloszlás mellett a véges varianciával rendelkező *t*-eloszlást hozza fel.

2.2. Szemivariancia (SV)

A variancia kockázati mutatóként történő használatának egyik hátulütője, hogy az átlagtól számított pozitív eltéréseket ugyanolyan hátrányosnak tekinti, mint a várható értéknél alacsonyabb hozamokat. A szemivariancia erre a problémára nyújt megoldást, ugyanis a szemivariancia kiszámításánál az átlag feletti értékeket figyelmen kívül hagyjuk.

$$SV(X) = E\left[(X_{sv})^2\right], \qquad /3/$$

ahol X_{sv} a következőképpen értendő:

$$X_{sv} = \begin{cases} X - E(X) & ha \quad E(X) > X \\ 0 & ha \quad E(X) \leq X \end{cases}. \qquad /4/$$

Az előzők alapján a szemivariancia kiszámítása diszkrét valószínűségi változó[10] esetén a következőképpen történik:

$$SV(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_{i,sv})^2}{n}, \qquad /5/$$

$$X_{i,sv} = \begin{cases} X_i - \bar{X} & \text{ha} \quad \bar{X} > X_i \\ 0 & \text{ha} \quad \bar{X} \leq X_i \end{cases} \qquad /6/$$

[9] Az elliptikus eloszlás részletes leírása megtalálható *Embrechts–Mcneil–Straumann* [2002] munkájában.
[10] A tanulmányban az egyes kockázati mutatók meghatározásánál a gyakorlati alkalmazásokban fontos szerepet játszó diszkrét esetekre koncentrálunk.

A varianciánál említettekhez hasonlóan a szemivariancia négyzetgyökét, a szemiszórást nem tekintjük a szemivarianciától különböző kockázati mutatónak. Ezen a ponton fontosnak tartjuk megemlíteni, hogy a kockázati mutatók csoportosítása történhet annak alapján is, hogy egy adott célértéknél (amely speciális esetben a várható érték) csak kisebb értékeket veszik-e figyelembe a kockázat kiszámításánál. Eszerint beszélhetünk egyoldali és kétoldali kockázati mutatókról.[11] Az előzők alapján a szemivariancia az egyoldali, míg a variancia a kétoldali mutatók csoportjába tartozik.

2.3. Átlagos abszolút eltérés (MAD)

Eftekhari et al. [2000] a variancia és a szemivariancia alkalmazásának hátrányaként róják fel, hogy ezek a mutatók nagyon érzékenyek a szélsőséges értékekre. Ennek oka, hogy mindkét mérőszám az átlagtól való eltérés *négyzetével* számol. Az említett problémát a tapasztalatok szerint nem oldja meg az sem, ha a kockázat kiszámítását a variancia helyett annak négyzetgyökére, a szórásra alapozzuk. A szórás esetében is igaz ugyanis, hogy egyetlen szélsőséges érték számottevően képes megnövelni a kockázatot. A probléma kiküszöbölhető, ha kockázati mutatóként az átlagos abszolút eltérést használjuk, amelynek kiszámítása diszkrét esetben a következőképpen történik:

$$\mathrm{MAD}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| X_i - \overline{X} \right|}{n} \qquad /7/$$

A /7/ összefüggésben szereplő változók jelentése megegyezik a korábban leírtakkal. Mivel az átlagos abszolút eltérés az egyes értékek átlagtól való eltérésének abszolút értékét veszi tekintetbe a kockázat mértékének meghatározásánál, ezzel a befektető számára kedvezőtlen (átlagosnál kisebb) és kedvező (átlagosnál nagyobb) értékeket egyaránt magába foglalja. Így a MAD – a varianciához hasonlóan – kétoldali kockázati mutató.

Véleményünk szerint kétségbe vonható *Eftekhari–Pedersen–Satchell* [2000] e mutatónak a varianciával és a szemivarianciával szembeni előnyét hangsúlyozó álláspontja. A MAD azon tulajdonsága, hogy a szélsőséges értékekre kevésbé érzékenyen reagál, mint a korábbiakban említett két mérőszám, inkább tekinthető hátrá-

[11] Az egyoldali kockázati mutatók többféle néven (one-side/shortfall/downside risk measures) ismertek az angol nyelvű szakirodalomban. A kétoldali kockázati mutatókra ugyanakkor a szimmetrikus jelzővel szoktak hivatkozni (two-side/symmetric measures).

nyosnak, mint előnyösnek. Bizonyos befektetési modelleket napjainkban ugyanis erős kritika ér amiatt, hogy krízishelyzetekben teljességgel használhatatlanok, mert alábecsülik a rendkívüli veszteségek bekövetkezésének valószínűségét. Ilyen esetekben a MAD kockázati mutatóként történő használatára épülő modell különösen megbízhatatlannak bizonyul. Fontos megemlíteni ugyanakkor, hogy a kockázat nagyságának túlértékelése sem szerencsés, hiszen felesleges óvatosságra intheti a befektetőt. A kockázati mutatók sokszínűsége és tulajdonságaik ismerete éppen az említett két szélsőséges eset közötti „egyensúlyozásban" jelenthet megfelelő támpontot.

2.4. Gini-féle átlagos differencia (GMD)

A Gini-féle átlagos differencia vagy a Gini-koefficiens különféle statisztikai alkalmazásokból – mint például a jövedelmek egyenlőtlenségének vizsgálata – ismert.

E szóródási mérőszám a következő összefüggéssel számítható:

$$\mathrm{GMD}(X)=\frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|X_j-X_k\right|}{n^2}. \qquad /8/$$

Itt X_i és X_j az adott befektetés értékének/hozamának megfelelő valószínűségi változó (X) két realizációja, n pedig a (diszkrét) valószínűségi változó lehetséges értékeinek száma.

A /8/ összefüggésből kitűnik, hogy a Gini-mutató kiszámításánál nem az átlagra mint általános viszonyítási értékre támaszkodunk, hanem a lehetséges értékek páronkénti különbségét (illetve ennek abszolút értékét) vesszük alapul. Ily módon e mérőszám nem sorolható sem az egyoldali, sem a kétoldali kockázati mutatók csoportjába. A relatív mutatók közé tartozik azonban annyiban, hogy értékének meghatározásánál bizonyos értékek *eltérését* vesszük számításba.

A Gini-féle átlagos differencia kockázati mutatóként történő használatát támogató érv, hogy egy olyan befektetés kockázatát, amely domináns egy másik befektetéssel szemben a másodfokú sztochasztikus dominancia szabálya[12] alapján, alacsonyabbnak mutatja, mint a másik befektetését. Tekintve, hogy a másodfokú sztochasztikus dominancia szabálya kockázatkerülő befektetők esetében releváns döntési kritérium, ennek teljesülése jogos kívánalom. Azért hangsúlyozzuk ezt mégis a GMD erényeként, mert bizonyos kockázati mutatók (például ilyen a variancia) esetében ez nem teljesül. A legfrissebb kutatások eredményei alapján a GMD eredményesen alkal-

[12] Ennek részleteit illetően lásd *Giorgi* [2005] és *Shalit–Yitzhaki* [2005. 61. old.]. Ezeket a jelen munka keretei között terjedelmi korlátok miatt nem tárgyaljuk.

mazható a kockázat mértékeként a portfólióoptimalizálásban. Az ún. átlag-Gini-portfólió kiválasztási modell leírása és működésének bemutatása megtalálható *Shalit–Yitzhaki* [2005] tanulmányában.

3. Abszolút kockázati mutatók

A következőkben a kockáztatott értéket és a feltételes kockáztatott értéket mutatjuk be.

3.1. Kockázatott érték (VaR)

A kockáztatott érték fogalmának megalkotása *Philippe Jorion* nevéhez fűződik (*Jorion* [1999]). Ez egy széles körben használt kockázati mutató, amelyet 1993-ban a Bázeli Bizottság kifejezetten ajánlott bankok kockázatvállalásának mérésére. A VaR mérőszám megmutatja egy adott időintervallum alatt az esetek egy adott, a konfidenciaszint által meghatározott százalékában várható legnagyobb veszteséget. *Frey és McNeil* [2002] a következő képlettel definiálja a kockáztatott értéket:

$$VaR = \inf\left\{L_i \in R \mid P(L > L_i) \leq 1 - \alpha\right\}, \qquad /9/$$

ahol α a konfidenciaszint, L pedig egy adott befektetés veszteségét jelentő valószínűségi változó. A korábban használt X értékek a befektetés hozamát jelentik, így veszteséggé a következő azonossággal alakíthatók: $L = -X$.[13]

1. táblázat

A VaR kiszámításának szemléltetése diszkrét esetre

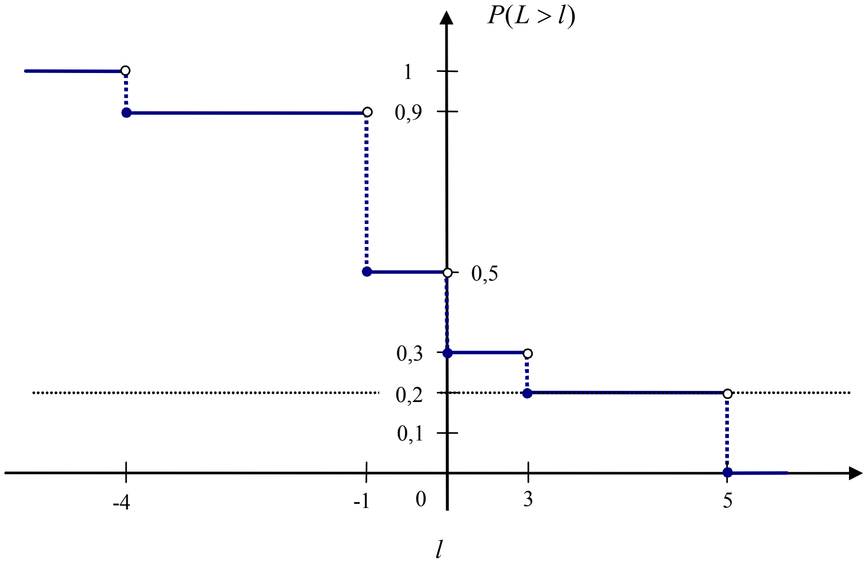
L_i	$P(L_i)$
5	0,2
3	0,1
0	0,2
–1	0,4
–4	0,1

[13] A VaR és a CVaR típusú mutatók használatakor a veszteségekre kerül a hangsúly, ezért kézenfekvő a hozamsorok helyett veszteségsorokkal dolgozni.

A /9/ képlet használata könnyen illusztrálható a következő példával. Legyenek az L_i értékek egy adott befektetés lehetséges veszteségei, $P(L_i)$ pedig az L_i veszteség bekövetkezésének valószínűsége.

Az 1. táblázatban megadott értékekhez tartozó kockáztatott érték (VaR) meghatározását 80 százalékos konfidenciaszint ($\alpha = 0{,}8$) mellett az 1. ábra mutatja.

1. ábra. A VaR kiszámításának szemléltetése diszkrét esetre



Az 1. ábrán megfigyelhetjük, hogy a $P(L > l) \leq 1 - \alpha$ egyenlőtlenségnek megfelelő L_i értékek az 5 és a 3. Az előző értékekből álló számhalmaz legnagyobb alsó korlátja (infimuma) 3, ezért VaR = 3.

A kockáztatott érték különböző számítási módszerei lényegében az eloszlásfüggvény meghatározásának/becslésének módjában térnek el egymástól. A jelen tanulmányban két módszert mutatunk be: a történeti szimulációs és a Monte-Carlo-szimulációs módszert. Mindkét módszer jól alkalmazható diszkrét esetekben.

A történeti szimuláció során a különböző L_i értékek egyszerű múltbeli idősorok (minták) elemei. Ebből adódik a módszer egyik legfőbb előnye: mivel a történeti szimuláció empirikus eloszlást használ, nem támaszkodik az L eloszlásával kapcsolatos feltételezésre. A Monte-Carlo-szimuláció esetében L eloszlásfüggvényét szimulált L_i értékek empirikus eloszlásaként kapjuk meg. A módszer használata előtt néhány paramétert meg kell választani. Ezek a paraméterek a következők.

– VaR időintervallum: megadja, hogy a várható legnagyobb veszteség milyen periódusra vonatkozik (például egy év).

– Alperiódusok száma (t): a számításokhoz a választott intervallumot alperiódusokra kell osztani (például 365 alperiódus / év).
– Sodródás (μ): a befektetés értékének várható százalékos változása a választott időintervallum alatt.
– Szórás (σ): a befektetés értékének szórása az adott intervallumon.
– Szimulált L_i értékek száma.
– A befektetés kezdőértéke (W_0).

Jorion [1999, 223. old.] az értékmozgások szimulálásához geometriai Brown-mozgást használ, az általa adott összefüggésből megkaphatjuk, hogy:

$$W_t = W_{t-1}(1 + \mu\frac{1}{t} + \sigma\varepsilon\sqrt{\frac{1}{t}}) . \qquad /10/$$

A /10/ képletben W_{t-1} a befektetés előző alperiódusbeli értékének jelölésére szolgál, az ε egy standard normális eloszlású valószínűségi változó. $1/t$ és $\sqrt{1/t}$ elemekre azért van szükség, hogy a teljes VaR időintervallumra vonatkozó sodródás- és szórásértékeket az alperiódusokra vonatkozó értékekké alakítsuk.[14]

A szimulált L_i értékek meghatározása a /10/ képlet és az előző paraméterek megadásával történik. A befektetés értéke W_0 -ból kiindulva alperiódusonként változik. Minden új befektetési érték függ az előző alperiódus záróértékétől. A befektetés értéke az alperiódusok számának megfelelő számban változik. Végül megkapjuk a befektetés záróértékét, melyből már könnyen számolható az időintervallum alatt elért veszteség. Így hozzájutunk egy szimulált L_i értékhez. A folyamat tetszőleges számban megismételhető, így az L_i értékek alapján számított empirikus eloszlás egyre inkább kisimul. Ez könnyen értelmezhető a gyakorlatban is: ha egy olyan egyéves befektetést szimulálunk, amelynek az értéke minden nap változik, akkor VaR intervallumnak egy évet, az alperiódusok számának 365-t kell választani. A μ értéke a szimulálni kívánt befektetés becsült éves hozama, míg σ a szórása. Az L_i adatok számát érdemes magasnak választani (például 1000 vagy 10 000). Egy 10 százalék éves átlaghozamú és 2 százalék éves szórású befektetés éves VaR értéke 365 alperiódus használatával a következőképpen számítható (lásd a /10/ formulát).

A Monte-Carlo-szimuláció bemenő paraméterei: *VaR* intervallum 1 év; alperiódusok száma (t): 365; $\mu_{éves} = 0{,}1$; $\sigma_{éves} = 0{,}02$; $W_0 = 1$; $\varepsilon_0 = 0{,}2741$; $\varepsilon_1 = 1{,}8465$ (az ε_0 és ε_1 értékek standard normális eloszlás alapján generált véletlen számok).

[14] Ebből következik, hogy ezek az elemek elhagyhatók, ha az alkalmazott sodródás- és szórásértékek az alperiódusra vonatkoznak.

Egy szimulált éves hozam kiszámításának lépései a következők:

W_1	$1\left[1+(0{,}1)\dfrac{1}{365}+(0{,}02)\dfrac{0{,}2741}{\sqrt{365}}\right]$ = 1,0006
W_2	$(1{,}0006)\left[1+(0{,}1)\dfrac{1}{365}+(0{,}02)\dfrac{1{,}8465}{\sqrt{365}}\right]$ = 1,0028
$\vdots$	
W_{365}	1,0934

Az előző számítás alapján a szimulált éves hozam = $W_{365} - W_0 = 0{,}0934$ = X_0, a veszteség ennek mínusz egyszerese.

A szimuláció megismétlésével létrehozható bármekkora L_i adatsor, ez a feladat számítógéppel könnyen automatizálható. A L_i értékek normális eloszlásúak lesznek, átlaguk egy -$\mu_{éves}$-hez közeli értéket vesz fel, ha a felhasznált szimulált veszteségek száma elég nagy. A szimulált L_i értékekből ezután meghatározható az empirikus eloszlásfüggvény. Miután L eloszlása rendelkezésre áll, a történeti szimulációs módszer és a Monte-Carlo-szimulációs módszer alapján történő számítások folyamata azonos.

A kockáztatott érték számításának következő lépéseként a /9/ képletnek megfelelően megkeressük azt a legkisebb L_i elemet, amelyre igaz, hogy $P(L > L_i) \leq 1 - \alpha$, azaz annak valószínűsége, hogy a veszteség L_i-nél nagyobb értéket vesz fel, kisebb 1–α értéknél vagy egyenlő azzal. Ez az L_i elem lesz az adott befektetés kockáztatott értéke.

A VaR számos hasznos tulajdonsággal rendelkezik, de a szakirodalomban egyre több, a mérőszám gyengéit feltáró és a VaR használatát ellenző publikáció jelenik meg. A mutató legfőbb előnye, hogy eredménye közérthető, ugyanis a kockázat mértékegysége ebben az esetben a befektetés pénzneme.[15] Ennek a jellemzőnek nagy jelentősége van a gyakorlati felhasználásban, ugyanis az érthetőség a befektetők oldaláról nagyobb bizalmat eredményez a mutató alkalmazásában.

A kockáztatott érték használata ellen szól, hogy nem veszi figyelembe a VaR-t meghaladó veszteségek mértékét, ami ún. vastagszélű eloszlások esetében a kockázat alulbecsléséhez vezet. A kockáztatott érték egy másik hibája, hogy nem teljesíti a szubadditivitás követelményét. Ez azt jelenti, hogy a kockáztatott értékkel mért portfóliókockázat magasabb lehet, mint a portfóliót alkotó értékpapírok kockázatának összege. *Csóka* [2003] tanulmányában példákkal mutatja be, ahogy a VaR ezen

[15] Az említett példában ugyan az egyszerűség kedvéért százalékos hozamot használtunk, de ez a befektetett pénzösszeggel szorozva abszolút tőkenagyságot eredményez.

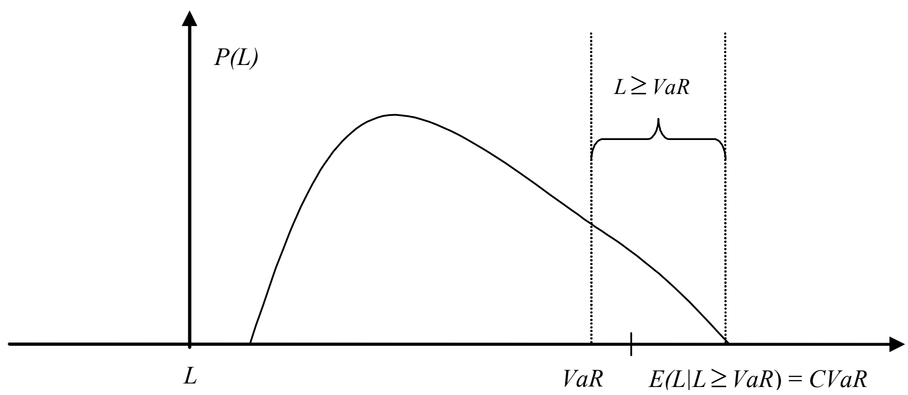
tulajdonságai a kockázat hibás megítéléséhez vezetnek. A vastagszélű eloszlások kockázatának alulbecslését például a portfóliókezelők kihasználhatják az általuk létrehozott befektetés kockázatának látszólagos csökkentésére. Ennek ellenére a VaR jelentősége semmiképpen sem lebecsülendő, hiszen bevezetése nagymértékben hozzájárult a kockázati mutatók fejlődéséhez, egyben új irányt mutatva a kutatásoknak.

3.2. Feltételes kockáztatott érték (CVaR)

A feltételes kockáztatott érték egy a VaR-ra épülő, de az azzal kapcsolatban felmerült problémákat kiküszöbölő kockázatmérő módszer. Bevezetése *Rockafellar* és *Uryasev* [2002a, 2002b] nevéhez fűződik. A CVaR mind a szubadditivitás, mind a vastagszélű eloszlások problémáját megoldja, folytonos és diszkrét problémáknál is használható, de definíciója különbözik a két esetben.

Folytonos eloszlás esetén a CVaR egy adott konfidenciaszinten a várható veszteség, feltéve, hogy a veszteség nagyobb vagy egyenlő a VaR mutató értékénél.

2. ábra. Feltételes kockázatott érték folytonos eloszlás esetén



Diszkrét eloszlások esetén a CVaR definíciója valamivel bonyolultabb. *Rockafellar* és *Uryasev* két csoportba osztják a CVaR-hoz hasonló kockázatmérő módszereket: $CVaR^+$ és $CVaR^-$.[16] Ezek a módszerek csak diszkrét esetekben különböznek egymástól, mégpedig annyiban, hogy a $CVaR^+$ csak a VaR-nál nagyobb, míg a $CVaR^-$ a VaR-nál nagyobb vagy vele egyenlő veszteségeket veszi figyelembe. A Rockafellar és Uryasev által javasolt CVaR a $CVaR^+$ és VaR mutatók súlyozott átla-

[16] Rockafellar és Uryasev a $CVaR^+$ kategóriába eső kockázati mutatókra két, az angol nyelvű szakirodalomban megtalálható példát hoznak: a „Mean Excess Loss” és az „Expected Shortfall” mutatókat. A $CVaR^-$ kategóriában pedig a „Tail-VaR” elnevezésű kockázati mutatót említik.

ga. A leírtak alapján a $\text{CVaR}^-(L)$ és a $\text{CVaR}^+(L)$ a következő képletekkel számolhatók:

$$\text{CVaR}^-(L) = E\{L \mid L \geq \text{VaR}(L)\}, \qquad /11/$$

$$\text{CVaR}^+(L) = E\{L \mid L > \text{VaR}(L)\}. \qquad /12/$$

A CVaR pedig a következőképpen határozható meg:

$$\text{CVaR}(L) = \lambda \text{VaR}(L) + (1-\lambda)\text{CVaR}^+(L), \qquad /13/$$

ahol λ VaR(*L*) súlya, tehát $0 \leq \lambda \leq 1$. λ számításához a következő képletet használhatjuk (lásd *Rockafellar–Uryasev* [2002a. 1452. old.]):

$$\lambda = \frac{\Psi(\text{VaR}) - \alpha}{1-\alpha}. \qquad /14/$$

Az előzőkben α a választott konfidenciaszint, Ψ pedig *L* eloszlásfüggvénye, tehát:

$$\Psi(\text{VaR}) = P(L \leq \text{VaR}(L)). \qquad /15/$$

Rockafellar és Uryasev azzal indokolják a CVaR használatának szükségességét, hogy a CVaR^+ és CVaR^- kockázati mutatókhoz tartozó mérőszámok nem folytonosak a konfidenciaszint függvényében, azaz ahogy a konfidenciaszint változik a CVaR^+ és CVaR^- értékek hirtelen, ugrásszerűen változ(hat)nak. A CVaR ezzel ellentétben folytonos, ahogy az a 3. ábrán is látható.

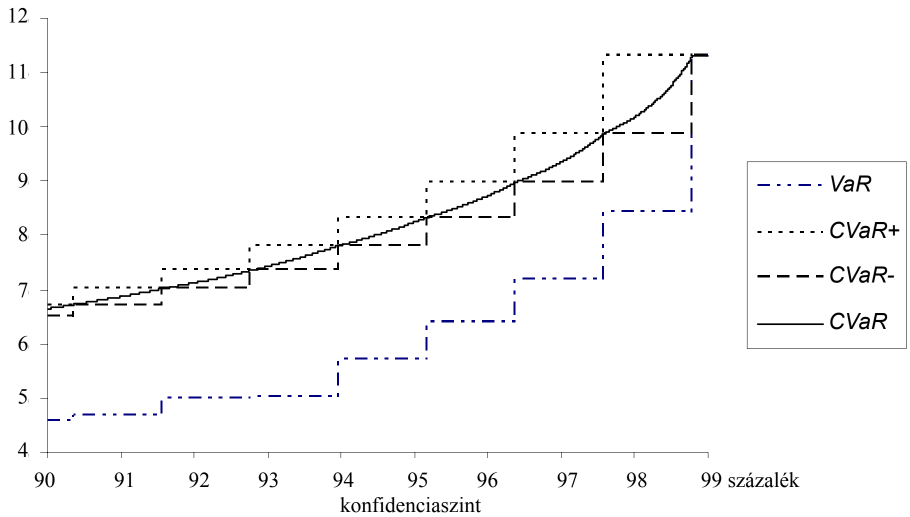
Az említett mutatók között általánosan a következő összefüggés érvényes, ahogyan ez a 3. ábrán is látható:

$$\text{VaR} \leq \text{CVaR}^- \leq \text{CVaR} \leq \text{CVaR}^+. \qquad /16/$$

A 3. ábrán megfigyelhető, hogy elég magas konfidenciaszinten (példánkban ez ≈99 százalék) $\text{VaR} = \text{CVaR}^- = \text{CVaR}$ és CVaR^+ nincs értelmezve. Ennek oka, hogy az alapul vett idősor viszonylag rövidnek mondható, és 99 százalékos konfidenciaszinten a VaR a legnagyobb veszteség értékét veszi fel.[17] Ebből következik, hogy CVaR^+ nem értelmezhető, hiszen /12/ alapján ennek a mutatónak a VaR-nál nagyobb veszteségek várható értékének kellene lennie, ilyen értékek pedig nem léteznek.

[17] Nagyobb minta használatával ez a határ közelebb kerül a 100 százalékos konfidenciaszinthez, de soha nem éri el azt.

3. ábra A kockáztatott érték típusú mutatók változása a konfidenciaszint függvényében
(százalék)



Megjegyzés. A grafikon alapjául az empirikus vizsgálat adatbázisából Ausztrália idősorait használtuk (a részleteket lásd a következő részben).

Érdekes megfigyelés ezen kívül, hogy a CVaR ezekre az esetekre törvényszerűen értelmezhető marad, ugyanis ha a kockáztatott érték egyenlő a legnagyobb veszteséggel a VaR súlya pontosan 1, CVaR^{+} pedig nem befolyásolja CVaR értékét. Ha $\mathrm{VaR}(L) = \max(L_i)$, akkor $\Psi(\mathrm{VaR}) = P(L \leq \mathrm{VaR}(L)) = 1$ és $\lambda = \dfrac{\Psi(\mathrm{VaR}) - \alpha}{1 - \alpha} = 1$, tehát $\mathrm{CVaR}(L) = \mathrm{VaR}(L)$.

4. A kockázati mutatók használatának szemléltetése tőzsdei hozamsorokon

A bemutatott nyolc kockázati mutató értékét kiszámítottuk egy 17 ország tőzsdeindexének hozamát tartalmazó adatbázis[18] esetében. Adatbázisunk nyolc fejlett tőke-

[18] A kockázati mutatók számításának illusztrálásához egy korábbi tanulmányunk (lásd *Bugár–Uzsoki* [2005]) elkészítéséhez összegyűjtött adatokat használtuk.

piaccal rendelkező országot (Ausztráliát, az Egyesült Királyságot, Franciaországot, Japánt, Kanadát, Németországot, Svájcot és az Egyesült Államokat) és kilenc kelet-közép-európai országot (Csehországot, Észtországot, Lengyelországot, Lettországot, Litvániát, Magyarországot, Oroszországot, Szlovákiát és Szlovéniát) foglalt magába. A felhasznált adatsorok az előbb említett országok tőzsdei árindexeinek havi bontású, 1997 januárjától 2003 decemberéig terjedő idősorai voltak.[19] A kapott kockázati mutatók összehasonlíthatósága céljából, a rendelkezésre álló indexek értékének százalékos változását alapul véve, havi hozamokat számoltunk. Ennek eredményeként, országonként egy 83 elemet tartalmazó idősorhoz jutottunk. Ezek figyelembevételével a korábbiakban bemutatott, az egyes mutatók kiszámítására alkalmas összefüggések felhasználásához X_i egy adott ország tőzsdei árindexének *i*-edik havi hozamaként értendő. Ennek alapján a VaR meghatározásában szereplő *L* veszteség a hozam ellentettjeként értelmezendő, azaz $L = -X$. Mint ismeretes, az abszolút kockázati mutatók kiszámításánál szerepet játszik a befektetés értékének nagysága, azaz a mérőszám értéke – százalékban megadott érték helyett – abszolút tőkenagyság. Ezekben az esetekben az általunk kapott értékek egyszerűen átválthatók abszolút tőkenagysággá, ha azokat megszorozzuk a befektetés kezdeti értékével. Mint már említettük, az egyes mutatók összehasonlíthatósága érdekében az összes kockázati mutató kiszámítását százalékban mért hozamokra alapozzuk.

Első lépésben elvégeztük a hozameloszlások normalitásának tesztelését. Erre a célra az SPSS szoftvert használtuk, amely a normalitás tesztelésére a Kolmogorov–Smirnov- és a Shapiro–Wilk-próbát alkalmazza.[20] A kapott eredményeket a 2. táblázat mutatja. Egy konkrét hozameloszlás esetében akkor döntöttünk a nullhipotézis, azaz annak elfogadása mellett, hogy az eloszlás normális, ha azt mindkét teszt támogatta (5 százalékos szignifikanciaszint mellett). A táblázatban kiemeltük azokat az országokat, amelyek esetében ez nem állt fenn. A 2. táblázatban minden hozameloszlás esetében feltüntettük a ferdeség és csúcsosság értékét is, *-gal jelölve azokat az eseteket, ahol a megfelelő paraméterek normál értékektől való eltérése 5 százalékos szinten szignifikáns.

A 2. táblázatból kitűnik, hogy a hozamok eloszlása hét ország, nevezetesen Észtország, Lettország, Magyarország, Oroszország, Svájc, Szlovákia és Szlovénia esetében bizonyult nem normálisnak. Ezt minden esetben megerősítették a ferdeségre és a csúcsosságra kapott értékek. A ferdeség értéke Szlovákia, Szlovénia és Lettország esetében mutatja a legnagyobb eltérést a normális eloszlás esetében várható 0 értéktől. A kapott érték az első két országra pozitív, ami az átlagnál nagyobb hozamértékek gyakoribb előfordulására utal. Ugyanakkor Lettország esetében a tőzsdeindex

[19] Hangsúlyozni szeretnénk, hogy ez nem minden ország esetében egyezik meg az adott tőzsde által publikált hivatalos tőzsdeindexszel.

[20] Az említett próbák alkalmazásához lásd *Massey* [1951] és *Shapiro–Wilk* [1965].

hozamának eloszlása negatív ferdeséget mutat, ami viszont a hozameloszlásnak az átlagnál kisebb értékek körüli „sűrűsödése” miatt fellépő aszimmetriáját fejezi ki. A csúcsosság értéke szintén az előbb említett három ország esetében a legnagyobb. Mivel a csúcsosság értéke mindhárom esetben pozitív, ez arra utal, hogy a hozamok eloszlásfüggvénye a normális eloszlásénál „laposabb”.

2. táblázat

A normalitás tesztelésének eredménye, a ferdeség és csúcsosság értéke

Ország	Ferdeség	Csúcsosság
Ausztrália	-0,48	0,48
Csehország	0,08	0,75
Egyesült Királyság	-0,50	0,07
Észtország	**-0,28**	**1,69***
Franciaország	-0,33	-0,28
Japán	-0,03	-0,05
Kanada	-0,67*	1,43*
Lengyelország	0,10	0,56
Lettország	**-0,81***	**3,67***
Litvánia	0,28	0,74
Magyarország	**-0,58***	**2,00***
Németország	-0,41	0,64
Oroszország	**-0,03**	**1,92***
Svájc	**-0,76***	**0,94**
Szlovákia	**0,92***	**2,71***
Szlovénia	**0,91***	**2,35***
Egyesült Államok	-0,40	-0,37

* A megfelelő paraméter 0-tól való eltérése 5 százalékos szinten szignifikáns.
Megjegyzés. A kiemelt országok hozamsorainak eloszlása nem bizonyult normálisnak 5 százalékos szignifikanciaszinten.

A 3. táblázatban megtalálható a 17 ország különböző mérőszámokkal mért kockázata. A jelölések megfelelnek a korábban használtaknak. VaR_H és VaR_{MC} a kockáztatott érték történeti és Monte-Carlo-szimulációval mért eredménye. A mérőszámok számítása megegyezik a korábban leírtakkal. A három feltételes kockáztatott érték típusú mérőszám alapjául a VaR_H szolgált, azaz $CVaR^+$ és $CVaR^-$ a VaR_H értéknél nagyobb és nagyobb egyenlő L_i értékeket veszi figyelembe. CVaR pedig a VaR_H és a $CVaR^+$ súlyozott átlaga. Azoknál a mutatóknál, ahol konfidenciaszint szükséges, 95 százalékos értékkel számoltunk.

A Monte-Carlo-szimulációhoz az egyhónapos intervallumot 20 alperiódusra bontottuk, ami hozzávetőlegesen a munkanapok száma. 20 000 véletlen szám használatával így 1000 szimulált havi hozamot kaptunk országonként. Sodródás- és szórásparaméterekként az adott ország adatbázisban megtalálható havi hozamainak átlagát és szórását használtuk.

3. táblázat

A különböző kockázati mutatók értéke a vizsgált tőzsdeindexek hozamsoraira

Ország	V	SV	MAD	GMD	VaR_H	VaR_{MC}	$CVaR^+$	$CVaR^-$	CVaR
Ausztrália	13,6	7,7	2,91	4,11	5,72	5,57	8,34	7,81	8,24
Csehország	74,4	36,4	6,80	9,54	10,72	12,93	17,76	16,35	17,50
Egyesült Királyság	20,3	11,6	3,51	5,03	9,03	7,10	10,14	9,92	10,10
Észtország	166,4	87,4	9,51	13,86	17,17	19,28	32,31	29,28	31,76
Franciaország	41,5	23,0	5,19	7,28	11,47	9,71	13,27	12,91	13,21
Japán	24,9	12,7	4,03	5,64	8,40	8,21	10,28	9,90	10,21
Kanada	29,7	17,2	4,15	5,97	7,74	8,13	12,54	11,58	12,36
Lengyelország	93,0	44,0	7,57	10,74	13,19	14,87	19,13	17,95	18,92
Lettország	92,5	53,5	6,73	9,92	13,76	15,08	27,65	24,87	27,14
Litvánia	40,4	19,2	4,94	7,04	10,78	10,29	12,78	12,38	12,71
Magyarország	91,4	50,0	7,54	10,46	12,58	13,94	21,70	19,88	21,38
Németország	63,4	35,2	6,31	8,82	12,48	12,15	18,63	17,40	18,41
Oroszország	360,1	182,3	14,20	20,39	29,65	26,67	42,07	39,58	41,62
Svájc	31,3	19,2	4,28	6,08	9,20	8,51	13,58	12,70	13,42
Szlovákia	54,2	22,0	5,63	7,95	10,77	11,78	13,72	13,13	13,62
Szlovénia	30,4	12,1	4,14	5,94	6,76	7,68	8,81	8,40	8,73
Egyesült Államok	26,5	14,6	4,25	5,84	7,75	7,78	10,62	10,05	10,52

Megjegyzés. A variancia és a szemivariancia százaléknégyzetben, a többi mutató pedig százalékban értendő.

A 3. táblázatban szereplő mérőszámok közvetlen összehasonlítása[21] helyett elkészítettük az országok rangsorolását a különböző mérőszámok által megadott kockázat alapján. Az eredmények a 4. táblázatban találhatók. A rangsor első eleme jelenti a legkisebb kockázatot az adott mérőszám vonatkozásában, a 17. elem pedig a legnagyobbat.

[21] A mutatók közvetlen összehasonlítása jelen formájukban nem lehetséges, mert a variancia és a szemivariancia mértékegysége eltér a többi mutatóétól. A probléma orvosolható, ha az előbbi két mutató helyett azok négyzetgyökét, a szórást, illetve a szemiszórást vesszük alapul.

A 4. táblázatban bemutatott eredmények alátámasztják alapfeltételezésünket, miszerint a kockázat mérőszáma megválasztásának komoly jelentősége van, ugyanis az érzékelt kockázat nagyban függ a választott mérőszámtól. Megfigyelhetjük, hogy mindössze három ország pozíciója nem változott: Ausztráliáé, Észtországé és Oroszországé. Mindhárom országról elmondható, hogy szélsőséges eset, ugyanis Ausztrália minden kockázati mutató vonatkozásában az első helyet foglalja el az egyes országok kockázat szerinti rangsorában (azaz a legkevésbé kockázatos befektetés), Észtország és Oroszország pedig a két legkockázatosabb befektetés.

4. táblázat

A vizsgált országok rangsora a különböző kockázati mutatók szerint

Ország	V	SV	MAD	GMD	VaR_H	VaR_{MC}	$CVaR^+$	$CVaR^-$	CVaR
Ausztrália	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Csehország	12	12	13	12	8	12	11	11	11
Egyesült Királyság	2	2	2	2	6	2	3	4	3
Észtország	16	16	16	16	16	16	16	16	16
Franciaország	9	10	9	9	11	8	8	9	8
Japán	3	4	3	3	5	6	4	3	4
Kanada	5	6	5	6	3	5	6	6	6
Lengyelország	15	13	15	15	14	14	13	13	13
Lettország	14	15	12	13	15	15	15	15	15
Litvánia	8	7	8	8	10	9	7	7	7
Magyarország	13	14	14	14	13	13	14	14	14
Németország	11	11	11	11	12	11	12	12	12
Oroszország	17	17	17	17	17	17	17	17	17
Svájc	7	8	7	7	7	7	9	8	9
Szlovákia	10	9	10	10	9	10	10	10	10
Szlovénia	6	3	4	5	2	3	2	2	2
Egyesült Államok	4	5	6	4	4	4	5	5	5

Eredményeink alapján szembetűnő az eloszlás ferdeségének az egyes országok kockázat szerinti rangsorára gyakorolt hatása, attól függően, hogy éppen melyik kockázati mutatót alkalmazzuk. A korábbiakban kimutattuk például, hogy Szlovénia tőzsdei árindexe pozitív ferdeséget mutat. Nagy bizonyossággal, ezzel magyarázható, hogy Szlovénia mindazokban az esetekben előkelőbb helyre kerül a rangsorban, amikor a kockázat mérésére egyoldali kockázati mutatót, azaz olyan mérőszámot alkalmazunk, amely kizárólag az eloszlásfüggvény „kedvezőtlen” részét veszi figyelembe a mutató kiszámításánál. Az előbbi mutatók a szemivariancia, a VaR, a CVaR, a $CVaR^+$ és a $CVaR^-$. Amennyiben a kockázatot az említett mérőszámokkal határozzuk meg, Szlovénia a második illetve harmadik helyet foglalja el a 17 ország kockázat szerinti rangsorában. Ugyanakkor, ha a varianciával (V), az átlagos abszolút eltéréssel (MAD) vagy a Gini-féle átlagos differenciával (GMD) mérjük a kockázatot, Szlovénia a rangsorban rendre a hatodik, negyedik, illetve az ötödik helyre esik vissza.

A leírtaknak éppen az ellenkezője figyelhető meg Lettország esetében. Mivel Lettország tőzsdei hozamának eloszlása negatív ferdeséget mutat, várható, hogy az egyoldali mutatók használata ez esetben kedvezőtlenebb helyet eredményez számára a vizsgált országok kockázat szerinti rangsorában, mint a kétoldali mérőszámok alkalmazása. A 4. táblázatból kitűnik, hogy pont ez következik be: míg az összes egyoldali mutató használata a 15. helyet biztosítja Lettország számára a kockázati rangsorban, addig a kétoldali mutatók alkalmazásával ennél kedvezőbb helyre kerül. A 4. táblázat tanúsága alapján a variancia, az átlagos abszolút eltérés illetve a Gini-féle átlagos differencia használata rendre a 14., 12. illetve a 13. helyet biztosítja Lettországnak. Fontosnak tartjuk megemlíteni ugyanakkor, hogy Szlovákia esetében a ferdeség és csúcsosság viszonylag nagy értéke nem eredményezett a kockázati mutatók megválasztásától függő, markáns eltérést a rangsorban.

5. Következtetések

Jelen tanulmányunkban áttekintettük a befektetéselemzés területén használatos jelentősebb kockázatmérő módszereket, azok gyengéit és előnyeit. Kiemeltük, hogy a szakirodalomban a befektetési kockázat mérésének kérdése napjainkban nagy figyelmet kap. Ennek oka, hogy az eddig elterjedt mutatók nagy része általánosan nem használható, a helyettük javasolt mutatók pedig még nem eléggé kiforrottak. A probléma megoldatlansága ellenére a terület nagy jelentőséggel bír, hiszen a kockázat mérésére szolgáló mutató megválasztása jelentősen befolyásolja egy befektetés észlelt kockázatosságát, így a befektetés észlelt teljesítményét és ezen keresztül a befektetők stratégiáját is.

A mutatók használatának illusztrálására bemutatott empirikus elemzésből levonhatjuk azt a következtetést, hogy az egyes kockázati mutatók nemcsak elméleti sajátosságaikban különböznek, hanem a gyakorlati felhasználásuk eredményeiben is. Ezt világosan mutatja az a tény, hogy a kockázat mérésére használt mutató megválasztásától függően módosul az elemzett országok kockázat szerinti rangsorban elfoglalt helye. Ez azért lényeges, mert a kockázatmérésről folytatott vita nem lenne releváns abban az esetben, ha a különböző mutatók használata csak a kockázat értékében, de nem az ez alapján létrehozott rangsorban okozna változást. A tanulmányban elvégzett empirikus elemzés során találtunk olyan országot, amely a 17 befektetés kockázati rangsorában öt helyet ugrott a kockázati mutató megváltoztatásának hatására.

A kockázati mutatók viselkedésének kérdése különös jelentőséggel bír a fejlődő tőkepiacok befektetői számára, ugyanis általánosságban elmondható, hogy a kevésbé likvid és jobban koncentrált tőkepiacok esetében a befektetések hozamai gyakrabban mutatnak a normálistól eltérő eloszlást. Ez a jelenség pedig a legtöbb klasszikus mutató esetében a kockázat helytelen megítéléséhez vezet. A területen folyamatos fejlődést figyelhetünk meg, az utóbbi időben a legnagyobb figyelmet a feltételes kockáztatott érték (CVaR) kockázati mutató kapta. A CVaR elődje a kockáztatott érték (VaR), amelynek eddig számos hibáját elemezték a szakterület kutatói.

A CVAR a VaR sok elméleti és gyakorlati problémáját megoldja. Ezek közül a legjelentősebb talán a szubadditivitás követelménye, melynek teljesítése az adott kockázati mutatóra alapozott korrekt portfólióoptimalizálást teszi lehetővé. Mindemellett a CVaR elterjedése a gyakorlatban egyelőre nem elvárható, hiszen a mutató újszerűsége miatt elképzelhető, hogy a későbbi, ezt elemző kutatások szintén feltérképeznek olyan eseteket, amelyekben a CVaR használata a kockázat hibás megítéléséhez vezet. Ennek ellenére jelentőségét nem becsülhetjük alul, hiszen valószínűnek tartjuk, hogy a pénzügyi kockázatmérés fejlődésének irányát ez a mutató a jövőben nagyban befolyásolja.

Irodalom

ALBRECHT, P. [2003]: Risk measures. *Sonderforschungsbereich* 504 Publications No. 03–01. Munkaanyag. 1–26. old.

ARTZNER, P. ET AL [1999]: Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*. 9. köt. 203–228. old.

BUGÁR GY. – UZSOKI M. [2005]: Nemzetközi részvény befektetési lehetőségek Közép- és Kelet-Európa új Európai Uniós tagállamainak szemszögéből. *Közgazdasági Szemle*. 52. évf. 6. sz. 576–598. old.

CSÓKA P. [2003]: Koherens kockázatmérés és tőkeallokáció. *Közgazdasági Szemle*. 50. évf. 10. sz. 855–880. old.

EFTEKHARI, B. – PEDERSEN C. S. – SATCHELL S. E. [2000]: On the volatility of measures of financial risk: an investigation using returns from European markets. *The European Journal of Finance*. 6. köt. 18–38. old.

ELTON, E. J. – GRUBER M. J. [1995]: *Modern portfolio theory and investment analysis*. John Wiley and Sons. New York

EMBRECHTS, P. – MCNEIL A. – STRAUMANN D. [2002]: Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. In: *Dempster, M. A. H.* (szerk.): *Risk management: value at risk and beyond.* Cambridge University Press.

FREY, R. – MCNEIL A. J. [2002]: VaR and expected shortfall in portfolios of dependent credit risks: Conceptual and practical insights. *Journal of Banking and Finance.* 26. köt. 1317-1334. old.

FUSAI, G. – LUCIANO E. [2000]: Dynamic value at risk under optimal and suboptimal portfolio policies. *European Journal of Operational Research*. 135. köt. 249–269. old.

GIORGI, E. D. [2005]: Reward-risk portfolio selection and stochastic dominance. *Journal of Banking and Finance*. 29. köt. 895–926. old.

INUI, K. – KIMIJA, M. [2005]: On the significance of expected shortfall as a coherent risk measure. *Journal of Banking and Finance*. 29. köt. 853–864. old.

JORION, P. [1999]: *A kockázatott érték*. Panem Kiadó. Budapest.

MARKOWITZ, H. M.[1952]: Portfolio selection. *Journal of Finance*. 7. köt. 77–91. old.

MARKOWITZ, H. M.[1991]: Foundations of portfolio theory (Nobel Prize Lecture). *Journal of Finance*. 46. köt. 469–477. old.

MARKOWITZ, H. M. [1999]: *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*. Basil Blackwell. Oxford.

MASSEY, F. J. [1951]: The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit. *Journal of the American Statistical Association*. 46. köt. 68–78. old.

OGRYCZAK, W. – RUSZCZYNSKI, A. [1997]: *From stochastic dominance to mean-risk models: Semideviations as risk measures.* International Institute for Applied Systems Analysis. (Munkaanyag.)

PFLUG, G. C. [1999]: *How to measure risk? Festschrift to F. Ferschl*. Physica-Verlag. Heidelberg.

RIEDEL, F. [2004]: Dynamic coherent risk measures. *Stochastic Processes and their Applications*. 112. köt. 185–200. old.

ROCKAFELLAR, R. T. – URYASEV, S. [2002a]: Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance.* 26. köt. 1443–1471. old.

ROCKAFELLAR, R. T. – URYASEV, S. [2002b]: Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk.* 3. évf. 3. sz. 21–41. old.

SHALIT, H. – YITZHAKI S. [2005]: The mean Gini efficient portfolio frontier. *Journal of Financial Research.* 28. évf. 1. sz. 59–75. old.

SHAPIRO, S. S. – WILK, M. B. [1965]: An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*. 52 évf. 3–4. sz. 591–611. old.

SZEGŐ, G. [2005]: Measures of risk. *European Journal of Operational Research*. 163. köt. 5–19. old.

Summary

Risk has to be understood and measured properly by investors in order to make well informed decisions. Despite the clear importance of the correct choice of a risk measure there is no single method widely supported by researchers. The present work aims to describe and summarise some of the most important properties of the conventional and newly developed risk measures as well as demonstrate their use. We highlight the most significant weaknesses of the conventional measures and the typical situations in which they produce a misleading estimate of risk. The present study also puts a high emphasis on recent developments and on the benefits resulting from the use of one of the most promising risk measures: conditional value at risk (CVaR). The calculation of each measure is also shown and demonstrated by simple examples. The described risk measures are also applied to a database of stock market indices of 17 countries. The countries are ordered for each method according to the amount of risk they represent for the investors and the results are analysed for certain patterns that can be expected based on the arguments presented in the theoretical section.