Élettartam-kockázat – a nyugdíjrendszerre nehezedő egyik teher*

Májer István,
a Rotterdami Egyetem doktorandusza
E-mail: i.majer@erasmusmc.nl

Dr. Kovács Erzsébet,
a Budapesti Corvinus Egyetem egyetemi tanára
E-mail: erzsebet.kovacs@uni-corvinus.hu

A várható élettartam folyamatos növekedése valószínűleg egyike a XX. század legnagyobb vívmányainak, ami azonban jelentősen hozzájárult a fejlett országok népességeinek elöregedéséhez. Az idősödő társadalmak számos kihívást támasztanak a modern jóléti államokkal szemben, beleértve nemcsak a szociális ellátások iránti kereslet növekedését (például egészségügy), hanem a nyugdíjrendszerek fenntarthatóságának követelményét is. A problémát az jelenti, hogy a biztosító társaságoknak, nyugdíjalapoknak szolgáltatást kell nyújtaniuk (legyen az akár egészségügyi ellátás vagy nyugdíjjövedelem), akármilyen hosszan éljenek is az emberek. Ebben pedig a kockázatot az hordozza, hogy néhány pénzügyi termék, például az annuitás formájában kapott nyugdíjjövedelem nagymértékben függ a várható élettartam változásától. A cikk elsődleges célja, hogy modellezze az időskori várható élettartam jövőbeli alakulását, az akörüli bizonytalanság nagyságát, valamint ezek hatását az annuitás értékére.

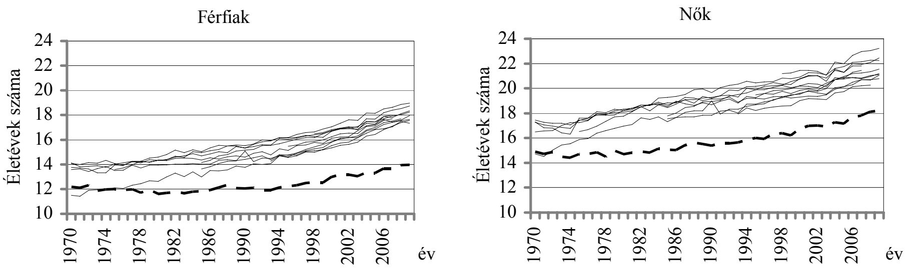
TÁRGYSZÓ:
Előrejelzés.
Várható élettartam.
Ökonometriai modell.

* A cikk ötletének felmerülésekor felkértük *Hablicsek László* demográfust, hogy vegyen részt a tanulmány elkészítésében. Sajnos azonban betegsége és halála megakadályozta, hogy végigkísérje a munkát. Most ezzel a cikkel szeretnénk munkássága és emléke előtt tisztelegni. Egyúttal köszönjük a névtelen lektor javaslatait.

Az elmúlt évtizedekben az emberek idős korban várható átlagos élettartama folyamatosan és alapvetően egyenletesen emelkedett a világ legtöbb fejlett országában. 1970 és 2005 között például Hollandiában a férfiak 65 éves korban várható élettartama 13,6-ról 16,4-re, míg a nőké 16,5-ről 20 évre nőtt.

Ami a jövőt illeti, a szakértők abban egyetértenek, hogy e mutató további növekedésére lehet számítani (*Garssen* [2006]). A XX. század első felében az átlagos élethossz emelkedése a fertőző betegségek visszaszorítását követően elsősorban annak eredménye volt, hogy a fiatalok halálozási rátái csökkentek. Ezzel szemben, az elmúlt évtizedekben a várható élettartam növekedését leginkább az idősek mortalitásának csökkenése okozza a prevenciós programoknak, valamint a krónikus betegségek hatékonyabb kezelésének köszönhetően (*Carnes–Olshansky–Grahm* [2003], (*Janssen–Mackecbach–Kunst* [2004], *Nusselder–Peeters* [2006]). A szakértők egybehangzó véleménye szerint ez utóbbi mutató további mérséklődésére van kilátás, viszont annak mértékéről különböznek a nézetek. Jól jellemzi a helyzetet, hogy a tudományos világban is két markánsan eltérő vélemény alakult ki a várható élettartam növekedésének nagyságával kapcsolatosan. A konzervatív nézetet vallók szerint az emberi élettartamnak van egy természetes maximuma, és a várható élettartam folytonos, gyors emelkedését feltételezni már egyáltalán nem olyan kézenfekvő, mint pár évtizeddel ezelőtt volt (*Olshansky–Carnes–Desesquelles* [2001], *Olshansky–Hayflick–Carnes* [2002]). Ezzel szemben a határtalan növekedés hívei azzal érvelnek, hogy a halálozási ráta nagysága és az abban bekövetkező visszaesés gyorsasága között nincs kapcsolat (*Lee* [2001], *Oeppen–Vaupel* [2002], *Vaupel et al*. [1998]). Sőt, a legtöbb fejlett országban a mortalitási ráták csökkenése felgyorsult az 1970-es évek óta.

1. ábra. Férfiak és nők 65 éves korban várható élettartama a fejlett nyugat-európai országokban és Magyarországon 1970 és 2009 között



Megjegyzés. Az ábrák az EU15, Németország (1991 előtt NSZK), Spanyolország, Franciaország, Olaszország, Magyarország (szaggatott vonallal jelölve), Hollandia, Finnország, Svédország, Egyesült Királyság, Norvégia és Svájc adatait mutatják be.

Forrás: Az Eurostat halálozási adatbázisa (Human Mortality Database – HMD) (http://www.mortality.org/)

Magyarországon a várható élettartam emelkedése nem volt mindig egyenletes, és ez különösen a férfiakra igaz. A nyugat-európai országokhoz képest a halálozási mutatók tekintetében hazánk állandó lemaradását figyelhetjük meg. Ezt mutatja az 1. ábra is, melyen az EU15 átlagához és Európa néhány más fejlett gazdaságú országához viszonyítottuk a magyar férfiak és nők 65 éves korban várható élettartamának emelkedését 1970 és 2009 között.

A lemaradás ellenére hazánkban is az élettartam növekedésének gyorsulására, valamint a férfi és női élettartam közötti különbség csökkenésére számíthatunk. Így indokoltnak látszik az állami nyugdíjak számításánál, előretervezésénél ezt is figyelembe venni. Erre különösen azért van szükség, mert a jelenlegi magyar állami nyugdíjrendszerben ún. szolgáltatással meghatározott nyugdíjat állapítanak meg, ami elsősorban nem a befizetésektől, hanem a ledolgozott évektől függ.[1] Ilyen feltételek mellett a hosszabbodó várható élettartam-kockázata teljes mértékben a társadalomra hárul.

A nyugdíjbiztosítók és -pénztárak általában más elv alapján működnek, a befizetéseket határozzák[2] meg előre. A tagok aktív életpályájuk alatt a jövedelmük egy részét rendszeresen befizetik egy kiválasztott nyugdíjalapba, majd miután nyugdíjba vonulnak, az így felhalmozott összeg alapján havonta nyugdíjjövedelmet kapnak a nyugdíjbiztosítótól. Ennek kifizetése akkor szűnik meg, amikor az egyén meghal. A nyugdíjbiztosítók stabil működésének egyik alapelve és -feltétele, hogy a be- és kifizetések között egyensúly legyen. Ennek érdekében arra törekednek, hogy – a költségek levonása és az infláció kompenzálása után – tagjaik ugyanakkora összeget kapjanak vissza életük végéig, mint amennyit befizettek. Mivel a felhalmozott vagyon csak a nyugdíjkorhatár elérésekor kerül átváltásra, figyelembe lehet venni az évtizedek során bekövetkezett élettartam-növekedést. Ezen a befizetéssel meghatározott alapon működnek a névleges egyéni számlás rendszerek[3] is, amelyek felosztó-kirovó elven fizetnek nyugdíjat (*Banyár–Mészáros* [2003]). A nyugdíjkorhatár magasabb lehet azok számára, akik nem halmoztak fel aktív életük során elegendő nyugdíjvagyont az egyéni számlájukon. Mindkét esetben a várható élettartam előrejelzése döntő fontosságú. Az alulbecslés egyéni és pénzügyi értelemben is kockázattal jár, hisz az illető elszegényedik, a nyugdíjrendszer fizetőképessége pedig csökken ilyen helyzetben. Ezért a halálozási valószínűségek és az abból származtatott várható élettartam becslése, előrejelzése rendkívül fontos információ a nyugdíjrendszer összes szereplője számára.

[1] A szolgáltatással meghatározott (defined benefit – DB) rendszerekben egy képlet adja meg a nyugdíjat. Hazánkban 2013-tól a ledolgozott évek számát szorozzuk 1,65-tel, és ez lesz a megállapított nyugdíj aránya az életkeresethez.

[2] A befizetéssel meghatározott (defined contibution – DC) elv alapján aktív korban csak a járulékkulcs adott.

[3] A névleges egyéni számlán (notional defined contribution – NDC) felírják az egyéni hozzájárulást, hozamot is jóváírnak, de a befizetést valójában azonnal ki is fizetik a már nyugdíjban levőknek.

Cikkünk, melynek elsődleges célja, hogy egy kiválasztott modellel és módszerrel modellezzük az időskori várható élettartam jövőbeli alakulását és az akörüli bizonytalanság nagyságát Magyarországon, a következőképpen épül fel. Az első fejezetben áttekintjük a mortalitás csökkenésének szerepét a várható élettartam számításában, kifejtjük az élettartam-kockázatot és annak jelentőségét. A második fejezetben részletes leírást adunk a Lee–Carter-modellről, a harmadikban pedig magyar mortalitási adatokra alkalmazzuk azt, majd bemutatjuk az így kapott eredményeket. A cikket rövid összegzéssel zárjuk, amelyben rámutatunk arra, hogy a várható élettartam kitolódása miképp kezelhető a nyugdíjrendszerben.

1. A mortalitás modellezése[4]

Habár azt gondolnánk, hogy a halálozás valószínűsége a kor előrehaladtával emelkedik, ez nem feltétlenül mindig van így. Ha megnézzük a hivatalos, évente közölt halálozási (például a KSH-) adatokat, akkor kisebb-nagyobb egyenetlenségeket találunk. Az újszülöttek tipikusan nagyobb valószínűséggel halnak meg egyéves koruk előtt, mint az egyévesek kétéves koruk előtt. Más korosztályok esetén, ahol a halálozási ráta alacsony, a véletlen játszhat különös szerepet. Egy ilyen jelenség, a „balesetcsúcs" (accident hump), ami a 18 és 25 év közötti férfiak halálozási valószínűségének egyenetlenségére utal. Mivel ez a korosztály a többihez képest többször szenved balesetet, előfordulhat, hogy a megfigyelt halálozási valószínűség a 21 évesek körében magasabb, mint a 22 éveseké. Ezen kívül ingadozásokat tapasztalhatunk nagyon magas életkorok esetén is, ahol a még élő népesség száma alacsony, ezért az idősek halálozási rátáinak alakulásában a véletlennek nagyobb szerepe van. Ezek abból erednek, hogy a közölt halálozási valószínűségek mögött mindig egy adathalmaz áll, mely a véletlen szerepét is tartalmazza.

1.1. A mortalitási trendek szerepe és az élettartam-kockázat

A halálozási valószínűségek időbeli alakulását úgy tudjuk a legjobban értékelni, ha azok modellezése során a mortalitást egy adott évben befolyásoló véletlen tényezők szerepét minimalizáljuk. Ezt szem előtt tartva legelőször is tisztázzuk, mit értünk halálozási valószínűség, valamint az abból származtatott túlélési valószínűség és várható élettartam alatt. A halálozási valószínűség ($q_{x,t}^{(g)}$) annak a valószínűséget fe-

[4] E fejezet *De Waegenaere –Melenberg–Stevens* [2010] tanulmánya ide vonatkozó részének összefoglalása.

jezi ki, hogy a *t*. évben egy *x* éves *g* csoporthoz tartozó személy már nem lesz életben a következő, *t* + 1. évben *x* + 1 éves korában. Következésképpen azt, hogy ugyanez a személy megéli legalább a következő életévét, tehát a túlélési valószínűséget, a következő képlettel adhatjuk meg:

$$p_{x,t}^{(g)} = 1 - q_{x,t}^{(g)} \,. \qquad /1/$$

Amennyiben a *g* csoport alatt a teljes populációt értjük, a *g* indexet elhagyjuk. Ha pedig azt feltételezzük, hogy a valószínűségek függetlenek a naptári (*t*) időtől, akkor tovább egyszerűsítve írhatjuk: q_x és p_x. Ebben az esetben annak a valószínűségét, hogy egy (*x* éves és *g* csoporthoz tartozó) személy legalább további τ évet él, a következő képlettel fejezhetjük ki:

$${}_{\tau}p_x = \prod_{j=0}^{\tau-1} p_{x+j} \,. \qquad /2/$$

A túlélési valószínűségeket felhasználva kiszámíthatjuk *a*) azoknak az éveknek a számát, amit egy egyén *x* éves kora után várhatóan még élni fog, vagyis a várható élettartamot (e_x-et); *b*) hogy egy egyén várhatóan hány éves korában ($x+e_x$); illetve *c*) melyik naptári évben hal meg (t_0+e_x). A legfontosabb ezek közül a várható élettartam, melyet az egyes életkorok túlélési valószínűségeinek végtelen összegeként definiálunk:

$$e_x = \sum_{\tau \geq 1} {}_{\tau}p_x \,. \qquad /3/$$

Az előző számítások során azzal a feltételezéssel éltünk, hogy az egyéves halálozási valószínűségek függetlenek az időtől, vagyis állandók. Ennek az ellenkezőjéről azonban bőséges bizonyíték áll a rendelkezésünkre. A 2. ábra – melyen a magyar népességben megfigyelt halálozási valószínűségek 1970 és 2006 közötti alakulását illusztráljuk különböző életkorokra vonatkozóan – hosszabb időszakot tekintve jól szemlélteti, hogy a halálozási valószínűségek a naptári évek előrehaladtával csökkennek, ezért a túlélési valószínűségek és a várható élettartamok növekednek.

Ennek tükrében viszont a halálozási és a túlélési valószínűségek állandóságáról tett előbbi feltételezés a várható élettartam számításánál nem helytálló. Következésképpen, a túlélési valószínűségeket, vagyis hogy a *t*. évben egy *x* éves korú *g* csoporthoz tartozó személy legalább τ további évet él, helyesen a következőképpen kellene kifejeznünk:

$${}_{\tau}p_{x,t}^{(g)} = p_{x,t}^{(g)} \cdot p_{x+1,t+1}^{(g)} \cdot \ldots \cdot p_{x+\tau-1,t+\tau-1}^{(g)} \,. \qquad /4/$$

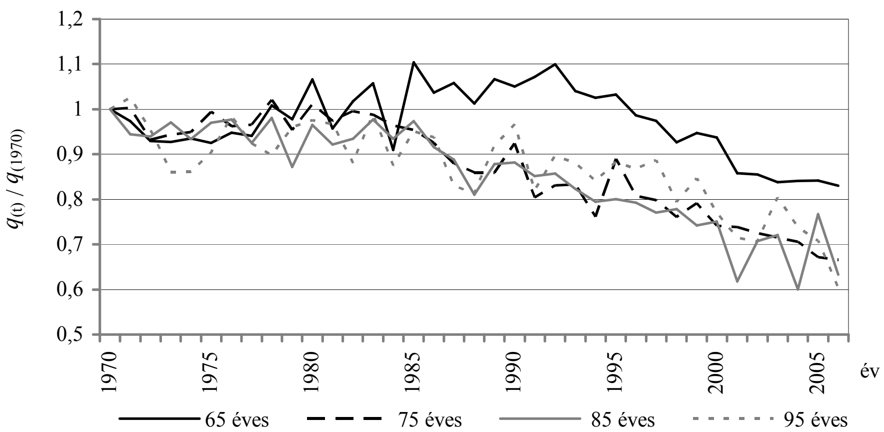
Ekkor a *t*. évet alapul véve, ahelyett, hogy időtől független túlélési valószínűségeket használnánk, a várható életévek számát helyesen a következő képlettel adhatnánk meg:

$$e_{x,t}^{(g)} = \sum_{\tau \geq 1} {}_{\tau}p_{x,t}^{(g)} . \qquad /5/$$

Ahhoz azonban, hogy az itt leírt várható élettartamot ki tudjuk számítani, az egyéves halálozási valószínűségek előrejelzésére van szükségünk.

A mortalitási viszonyokban és ebből eredendően a várható élettartamban végbemenő változások rendkívül fontos szerepet játszanak a nyugdíjbiztosítók működésében. Ha például egy nyugdíjbiztosító nem venné figyelembe a túlélési valószínűségek emelkedését, akkor alulbecsülné tagjai várható élettartamát és a nekik fizetendő annuitás (diszkontált) várható értékét. *Hári* és szerzőtársai [2008] egy tanulmányukban arra a következtetésre jutottak, hogy a becsült várható élettartam lényegesen magasabb, ha a számításoknál a mortalitás jövőbeli változásait is figyelembe vesszük. Ez pedig sokszor hosszú időszakra történő előrejelzést igényel.

2. ábra. Egyéves halálozási valószínűségek 1970 és 2006 között a teljes magyar népességre vonatkozóan



Megjegyzés. Az ábra a megfigyelt egyéves halálozási valószínűségeket mutatja 1970 és 2006 között a teljes magyar népesség különböző (65, 75, 85, 95 éves) életkoraira vonatkozóan, 1970-re normalizálva.

Forrás: Az adatok az Emberi Mortalitási Adatbázisból (Human Mortality Database – HMD) származnak (http://www.mortality.org/)

A javuló halálozási tendencián kívül van azonban egy másik kihívás is, amellyel a nyugdíjbiztosítóknak szembe kell nézniük. A 2. ábrán azt is megfigyelhetjük, hogy a halálozási valószínűségek hosszú távon csökkenő trendjének mértéke bizonyos fokig megjósolhatatlan. Ennek következtében a már tárgyalt, mortalitás állandóságára tett feltételezésen kívül azt is megalapozatlan lenne elfogadnunk, hogy a halálozási viszonyok jövőbeli (további kedvező) alakulásának mértékét pontosan, azaz determinisztikusan, előre meg tudnánk határozni. Ehelyett sokkal életszerűbb azt feltételeznünk, hogy a halálozási valószínűségekben végbemenő változás egy véletlenszerű (sztochasztikus) folyamat. A mortalitás trendjének sztochasztikus mivoltából származik az ún. élettartam-kockázat (longevity risk), amely lényegében annak kockázatát jelenti, hogy nem tudjuk pontosan meghatározni a várható élettartam növekedését, mivel a jövőbeli túlélési valószínűségek változása véletlenszerűen alakul.

1.2. Az élettartam-kockázat fontossága

A nyugdíjbiztosítók kalkulációik során alapvetően három mortalitáshoz köthető kockázatot különböztetnek meg: *a*) az egyéni halálozási, *b*) a várható élettartam és a *c*) modellkockázatot. Az első arra utal, hogy az egyén hátralevő élettartama egy valószínűségi változó, még ismert halálozási kockázat esetén is. Ezt idioszinkratikus (egyéni) kockázatnak szokás nevezni. A várható élettartam-kockázat azt jelzi, hogy a halandóság (és más attól függő mennyiség, mint például a várható élettartam) hosszú távon eltér annak előre jelzett mértékétől, trendjétől. Az utolsó pedig arra vonatkozik, hogy az előrejelzéseknél használt különböző modellek eltérő eredményekre vezethetnek a jövőbeli várakozásokat illetően.

A következőkben az egyéni halálozási és a várható élettartam-kockázatra térünk ki részletesen, hogy bizonyítsuk, az utóbbi szemben az elsővel nem diverzifikálható. Ehhez képzeljünk el N db azonnal induló életjáradékot, amelyet x éves g csoporthoz tartozó embereknek adnak el a t. évben. Az életjáradék annuitás formájában 1 Ft-ot fizet egy adott személynek (mindig az időszak végén), ha az az év végén életben van. Tételezzünk fel továbbá állandó és kockázatmentes kamatlábat (r), és jelöljük $1_{i,t+\tau}$-gyel ($\tau \geq 1$) azt az indikátor változót, amely az 1 és a 0 értéket veszi fel aszerint, hogy az annuitás birtokosa $t+\tau$. évben még életben van-e vagy sem. Ekkor a $t+\tau$. években ($\tau \geq 1$) az i-edik annuitás birtokosa számára történő kifizetések t. évre vonatkozó jelenértékét a következő képlettel foglalhatjuk össze:

$$Y_i = \sum_{\tau \geq 1} 1_{i,t+\tau} \frac{1}{(1+r)^{\tau}} . \qquad /6/$$

A példa kedvéért először tételezzük fel, hogy a halálozási valószínűségek ismertek, más szóval van egyéni halálozási kockázat, de eltekintünk a várható élettartam-kockázattól. Ekkor az i. személynek történő kifizetések várható jelenértéke a t. évben:

$$a_{x,t}^{(g)} = \sum_{\tau\geq 1} E\left[1_{i,t+\tau}\right]\frac{1}{\left(1+r\right)^{\tau}} = \sum_{\tau\geq 1} {}_{\tau}p_{x,t}^{(g)}\frac{1}{\left(1+r\right)^{\tau}}. \qquad /7/$$

A kockázatközösség-elv alapján az előző, várható diszkontált érték az annuitás tisztességes (fair) piaci ára is egyben. Vagyis Y_i fair ára egyenlő $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$ fair árával. Tételezzük fel, hogy az Y_i-k egymástól függetlenek, várható értékük $\mu = E\left(Y_i\right)$ és varianciájuk $\sigma^2 = \mathrm{Var}\left(Y_i\right)$. Ekkor $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$ varianciáját a következőképpen számíthatjuk: $\mathrm{Var}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i\right) = \frac{\sigma^2}{N}$. Abban az esetben, ha N kellően nagy, $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$ kockázatmentessé válik, és fair ára megegyezik várható diszkontált értékével (nincs rajta kockázati prémium). Ez azt jelenti, hogy az egyéves halálozási valószínűségek ($q_{x,t}^{(g)}$) olyan halálozási kockázatot jelentenek egyéni szinten, amelyet még a biztosítótársaságok meg tudnak szüntetni a kockázatközösség elvén keresztül.

Ezzel szemben a várható élettartam-kockázatot a veszélyközösség elve nem tudja megszüntetni, ezért az annuitás fair ára tipikusan kockázati prémiumot is tartalmaz. Ennek illusztrálásához visszatérünk az annuitás előző képletéhez. Adott jövőbeli halálozási valószínűségek $\Psi_t = \left\{q_{x,t+\tau}^{(g)} \mid \tau \geq 1\right\}$ esetén továbbra is kézenfekvő azt feltételeznünk, hogy az Y_i-k függetlenek egymástól, de ezúttal mind a várható érték $\mu\left(\Psi_t\right)$, mind pedig a variancia $\sigma^2\left(\Psi_t\right)$ függ Ψ_t-től. Következésképpen, amikor az $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$ varianciáját meghatározzuk, figyelembe kell vennünk, hogy az egyéves valószínűségek (Ψ_t) véletlenszerűen alakulnak. A varianciát a következőképpen írhatjuk tovább:[5]

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i\right) = E\left(\mathrm{Var}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i \mid \Psi_t\right]\right) + \mathrm{Var}\left(E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i\right] \mid \Psi_t\right) =$$
$$= \frac{E\left(\sigma^2\left(\Psi_t\right)\right)}{N} + \mathrm{Var}\left(\mu\left(\Psi_t\right)\right).$$

[5] A képlet a torzításvariancia felbontása is egyben.

A képlet jobb oldalán lévő összeg első tényezője növekvő N esetén eltűnik, a második tényező azonban független N-től. Ez azt jelenti, hogy az élettartam-kockázat megléte esetén $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$ nem válik kockázatmentessé, még akkor sem, ha N nagyon nagy. Vagyis, a várható érték, az $E(Y_i) = E(\mu(\Psi_t))$ nem lesz az annuitás fair díja.

2. Mortalitási modellek

Minden halálozási modell alapja a nyers (központi) mortalitási ráta, tehát az egy főre jutó halálozások száma, melyet a következőképpen definiálunk: $m_{x,t}^{(g)} = D_{x,t}^{(g)} \big/ E_{x,t}^{(g)}$. A képletben a $D_{x,t}^{(g)}$ azoknak az x éves g csoporthoz tartozó embereknek a számát jelöli, akik a t. évben meghaltak, $E_{x,t}^{(g)}$ pedig az összes életévek számát takarja (az ún. kitettséget (exposure)), azaz az x éves g csoporthoz tartozó emberek megélt életéveinek a számát a t. évben. A központi halálozási rátákat tipikusan éves alapon figyelik meg ($t \in \{1,2,...,T\}$) 0 éves kortól kezdve valamely maximális életkorig, például $x \in \{0,1,..,110\}$. A halálozások számát és a kitettséget nemzeti statisztikákból tudhatjuk meg, melyek közül az utóbbit általában becsülni szokás.

Az egyéves halálozási valószínűségek a mortalitási rátákból ($m_{x,t}^{(g)}$) származtathatók. E kettő mérték között meglehetősen bonyolult összefüggés van, ezért valamilyen feltételezéssel kell élnünk, hogy azt leegyszerűsítsük. Például, ha feltesszük, hogy a kitettség a kor lineáris függvénye, akkor a halálozási valószínűséget a következő formában írhatjuk:

$$q_{x,t}^{(g)} = \frac{m_{x,t}^{(g)}}{1+\frac{1}{2}m_{x,t}^{(g)}}. \qquad /8/$$

(Egy másik lehetőség azt feltételezni, hogy a központi halálozási ráta megegyezik a halálozási intenzitással, mely esetén a halálozási valószínűség: $q_{x,t}^{(g)} = 1-\exp\left(-m_{x,t}^{(g)}\right)$.)

A (dinamikus) halálozási modellek készítésének egyik módja, hogy az adatokra olyan mortalitási szabályt illesztünk, amelyben néhány, esetleg mindegyik paraméter függ az időtől. Az így kapott időfüggő paraméterek sorát felhasználhatjuk, és megfelelő statisztikai és ökonometriai módszerekkel idősormodelleket illeszthetünk rájuk. Az utóbbiakat alapul véve pedig előrevetíthetjük a jövőbeli mortalitási rátákat, majd meghatározhatjuk az élettartam-kockázatot.

A Lee–Carter-modell

Lee és *Carter* amerikai mortalitási rátákat modelleztek (*Lee–Carter* [1992]), amely során egy extrapolatív módszert találtak ki és alkalmaztak. Modelljükben a halálozás három paramétertől függött: két determinisztikus kor- és egy sztochasztikus időparamétertől. Ennek a korábbi modellekhez képest nagy erénye az volt, hogy a halálozási ráták előrejelzéséhez egy egyszerű demográfiai modellt idősor-elemzési módszerekkel kombinált, anélkül, hogy a halálozási ráta változását befolyásoló orvosi, életviteli és egyéb tényezőket is magában foglalta volna. Később kiderült róla, hogy a gyakorlatban nagyon jól működik, és azóta a mortalitás előrejelzésének vezető statisztikai modellévé vált (*Deaton–Paxson* [2004]).

Lee és Carter csupán három paramétert tartalmazó modellje tehát a következő:

$$\ln m_{x,t}^{(g)} = \alpha_x^{(g)} + \beta_x^{(g)} \kappa_t^{(g)} + \varepsilon_{x,t}^{(g)}, \qquad /9/$$

amelyben $m_{x,t}^{(g)}$ egy x éves ember t. időszakra vonatkozó halálozási rátáját jelenti. $\alpha_x^{(g)}$, $\beta_x^{(g)}$ és $\kappa_t^{(g)}$ paraméterek, amelyeket becsülni kell, $\varepsilon_{x,t}^{(g)}$ pedig a hibatag.

A Lee–Carter-modell alkalmazása három lépésből áll: először a modell paramétereit becsüljük, aztán a modellezett halálozások számát a megfigyelt halálozások számához igazítjuk, végül pedig előrejelzést készítünk a mortalitási rátákra vonatkozóan.

Az első lépés során tehát a /9/ modellből az $\alpha_x^{(g)}$ -t, $\beta_x^{(g)}$ -t és $\kappa_t^{(g)}$ -t becsüljük, hogy modellezni tudjuk a mortalitási ráták logaritmusát: $\ln m_{x,t}^{(g)}$. A becslés során a reziduumok négyzetét szeretnénk minimalizálni, amihez kézenfekvőnek tűnik a legkisebb négyzetek módszerét választani. Bár az egyenlet jobb oldalán nincsenek megfigyelt magyarázóváltozók – csupán paraméterek –, ha feltételezzük, hogy a hibatagok független és azonos normális eloszlású változók, az $\ln\left(m_{x,t}^{(g)}\right) - \alpha_x^{(g)}$ mátrix sajátérték-felbontásával becsült paraméterek megegyeznek a maximum likelihood (ML-) becsléssel kapott paraméterekkel. A Lee–Carter-modellben rendszerint csak az első saját értéket használjuk, ezért a $\hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t$ mátrix a sajátérték-felbontás első saját értékének ($\sigma_1^{(g)}$), első oszlopának ($u_1^{(g)}$) és első sorának ($\left[v_1^{(g)}\right]^T$) függvénye. Mivel azonban a sajátérték-felbontás végtelen lehetséges megoldást szül, Lee és Carter a következő két korlátot vezette be a paraméterek egyértelmű meghatározása érdekében: [6]

$$\sum_x \beta_x^{(i)} = 1 \text{ és } \sum_t \kappa_t^{(i)} = 0 .$$

Ez utóbbi kikötés egyben azt is jelenti, hogy az x életkorra becsült halálozási ráták logaritmusának várható értéke a megfigyelt mortalitási ráták átlaga, vagyis a korspecifikus paraméter $\hat{\alpha}_x$. Ekkor a becsült $\hat{\kappa}_t$ paramétert egy időfüggő látens folyamatként értelmezhetjük, amely a mortalitási ráták időbeli alakulását számszerűsíti. A $\hat{\beta}_x$ paraméter pedig azt fejezi ki, hogy melyik korspecifikus ráta változik gyorsan vagy lassan a κ_t paraméter egy egységnyi változásának hatására.[7] Az $\varepsilon_{x,t}$ a mortalitási ráták körüli véletlen szerepét jelöli.

Ha x-szel a modellezett életkorokat, T-vel pedig a modellezett éveket jelöljük, akkor a paramétereket a következő képletek alapján tudjuk becsülni:

$$\hat{\alpha}_x^{(g)} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \ln\left(m_{x,t}^{(g)}\right)}{T}, \qquad /10/$$

$$\hat{\beta}_x^{(g)} = \frac{u_1^{(g)}(x)}{\sum_{x\in X} u_1^{(g)}(x)}, \qquad /11/$$

$$\hat{\kappa}_t^{(g)} = \sigma_1^{(g)} \nu_1^{(g)}(t) \sum_{x\in X} u_1^{(g)}(x). \qquad /12/$$

A második lépés során a $\hat{\kappa}_t$ paramétereket kiigazítjuk, hogy a megfigyelt és a modellezett halálozások száma minden egyes évben megegyezzen egymással. Erre

[6] Könnyen belátható, hogy ha a, b és k megoldás, akkor $a–bc$, b és $k+c$ is az bármely c-re: $\tilde{a} - \tilde{b}\tilde{c} + \tilde{b}\left(\tilde{k} + \tilde{c}\right) = \tilde{a} + \tilde{b}\tilde{k}$.

[7] $\sum_{t\in T} \log M(x,t) = \sum_{t\in T}\left(a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}\right) = Ta_x + \sum_{t\in T} \varepsilon_{x,t}$,

$$E\left[\sum_{t\in T} \log M(x,t)\right] = pa_x \Rightarrow a_x = \frac{E\left[\sum_{t\in T} \log M(x,t)\right]}{p},$$

$$\frac{dE\left[\sum_{t\in T} \log M(x,t)\right]}{dt} = b_x \frac{dk_t}{dt}$$

tulajdonképpen azért van szükség, mert a modell paramétereinek becslésekor a fiatal korok mortalitási rátái ugyanolyan súlyt kapnak, mint az idős korokéi, holott az előbbiek lényegesen kisebb mértékben járulnak hozzá az összes halálozás számához. Az eredeti $\hat{\kappa}_t$ -t helyettesítendő $\tilde{\kappa}_t$ -t a következőt egyenlőségből egyértelműen meghatározhatjuk:

$$\sum_x D_{x,t} = \sum_x \left[E_{x,t} \exp\left(\hat{\alpha}_{x,t} + \hat{\beta}_x \tilde{\kappa}_t \right) \right]. \qquad /13/$$

A harmadik lépés során a mortalitási rátákat előrevetítjük a jövőbe, majd az így kapott értékeket felhasználva megbecsüljük a jövőben várható élettartamot. Az előrejelzés során az $\hat{\alpha}_x$ és a $\hat{\beta}_x$ paramétereket konstansnak tekintjük, míg a $\tilde{\kappa}_t = \left[\tilde{\kappa}_1^{(i)}, \tilde{\kappa}_2^{(i)}, \ldots, \tilde{\kappa}_t^{(i)} \right]^T$ idősorát standard egyváltozós idősor-elemzési módszert használva extrapoláljuk. Végeredményben ezeket az extrapolált látens faktorokat helyettesítjük vissza a Lee–Carter-egyenletbe /9/, hogy megkapjuk a jövőbeli mortalitási rátákat, majd a valószínűségeket.

Lee és Carter számos autoregresszív integrált mozgóátlagolású (*ARIMA*-) modellt teszteltek, de azt találták, hogy egy egyszerű véletlen bolyongás (random walk) modell illeszkedik legjobban az adataikra. Ugyan a szerzők rámutattak arra, hogy egyéb adatokra más modellspecifikáció alkalmasabb lehet, de a szakirodalomban és az alkalmazásokban szinte kivétel nélkül ezzel a modellel lehet találkozni. Cikkünkben ezért mi is követjük a Lee–Carter-féle modellformát, és az időparaméterek sorát a következőképpen modellezzük:

$$\tilde{\kappa}_t = \tilde{\kappa}_{t-1} + \theta + \delta_t , \qquad /14/$$

$$\delta_t \sim N\left(0, \delta^2\right), \qquad /15/$$

ahol a θ az ún. drift- (vagy trend-) paraméter, ami a mortalitás csökkenésének várható tendenciáját, mértékét ragadja meg. A δ_t hibatagról normalitás eloszlást feltételezve a trendparaméter /16/, a hiba varianciájának /17/, valamint a trendparaméter standard hibájának /18/ ML-becslőfüggvénye a következő:

$$\hat{\theta} = \frac{\tilde{\kappa}_T - \tilde{\kappa}_1}{T-1}, \qquad /16/$$

$$\hat{\delta}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} \left(\tilde{\kappa}_{t+1} - \tilde{\kappa}_t - \hat{\theta} \right)^2 \text{ és} \qquad /17/$$

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}\right) = \frac{\hat{\delta}}{T-1}. \qquad /18/$$

A jövőbeli mortalitási ráták modellezéséhez a megfigyelt adatok utolsó évének mortalitási rátáit és egy úgynevezett változásfaktort (VF) használhatunk. Az utóbbi alkalmazását korábban már mások, például *Renshaw* és *Haberman* [2003] is javasolták. A modellezés ezen módja tulajdonképpen elkerüli, hogy egy hirtelen ugrás legyen az utolsó év megfigyelt és az első előre jelzett év mortalitási rátáinak értékei között. Más szóval, a becslési („modellillesztési") hibát mesterségesen nullára állítjuk az utolsó megfigyelt évre vonatkozóan. Egy adott jövőbeli év ($T + s$) halálozási rátái pedig a megelőző évek halálozási rátáitól ($T + s - 1$), valamint a változásfaktortól függnek. Vagyis egy $T + s$. évben x éves egyén előre jelzett mortalitási rátáját a következőképp írhatjuk:

$$\hat{m}_{x,T+s} = m_{x,T} \times VF_{x,T+s} + \hat{\varepsilon}_{x,T+s}, \qquad /19/$$

melyben a változásfaktor extrapolált értékeit a

$$VF_{x,T+s} = \exp\left(\hat{\beta}_x \times \left(\tilde{\kappa}_{T+s}^{(i)} - \tilde{\kappa}_{T+s-1}^{(i)}\right)\right) \qquad /20/$$

képlettel adhatjuk meg, ahol $\hat{\beta}_x$ a becsült β_x-t, $\tilde{\kappa}_{T+s}$ az előre jelzett látens mortalitási indexet jelöli $s \geq 1$ időszakkal $\tilde{\kappa}_T$ után.

$\tilde{\kappa}_{T+s}^{(i)}$-nak a következő feltételes eloszlása van:

$$\tilde{\kappa}_{T+s} \mid \tilde{\kappa}_{T+s-1}, \hat{\theta} \sim N\left(\tilde{\kappa}_{T+s} + \hat{\theta}, \hat{\delta}^2\right). \qquad /21/$$

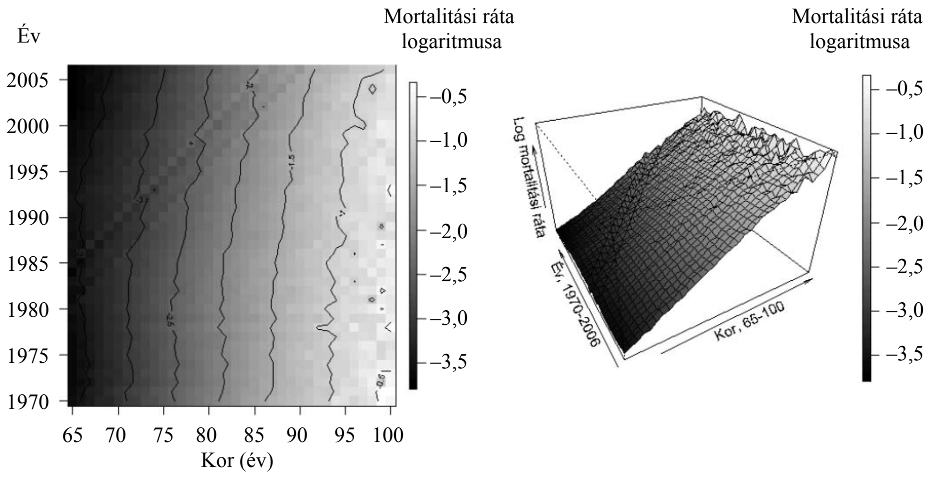
Ha a $\hat{\theta}$ trendparaméter körüli bizonytalanságot is szeretnénk beépíteni az előrejelzéseinkbe, akkor a /21/ képletben a $\hat{\theta}$-t $\dot{\theta} \sim N\left(\hat{\theta}, \mathrm{Var}\left(\hat{\theta}\right)\right)$-tal helyettesíthetjük.

Az előrejelzés menete a következő: a /21/ képletben leírt eloszlás alapján számos, véletlen kappát szimulálunk. A szimulált kappákat visszahelyettesítjük a /19/ és /20/ képletbe, majd az előre jelzett mortalitási rátákat elmentjük, és a /8/ képlet szerint átalakítjuk egyéves halálozási valószínűséggé. Az utóbbi alapján ki tudjuk számolni a túlélési valószínűségeket, ebből kiindulva pedig modellezni tudjuk a jövőbeli várható élettartamot az /5/ képlet segítségével. Végül pedig számszerűsíthetjük a bizonytalanságot a jövőbeli túlélési valószínűségek és a várható élettartam körül, melyet tanulmányunkban három modellen keresztül teszünk. Először egy determinisztikus szimulációt végzünk, mely során úgy kezeljük a mortalitási index jövőbeli értékeit, mintha azokat múltbeli adatok alapján biztosan ismernénk. A további két modellben a jövőbeli kappákat bizonytalannak vesszük. Az első esetben a becsült trendet adottnak, a mortalitási index jövőbeli alakulását bizonytalannak tekintjük, a második esetben a kappák jövőbeli alakulásának bizonytalansága mellett azt feltételezzük, hogy a becsült trend maga is valószínűségi változó.

3. Alkalmazás

A Lee–Carter-modellt magyar adatokra alkalmazva modelleztük és előre jeleztük a mortalitási rátákat, valamint megbecsültük a jövőbeli várható élettartamot és az akörüli bizonytalanság nagyságát. A következőkben számos eredményt bemutatunk, melyek a modell becsléséhez és alkalmazásához köthetők. Számításainkhoz a 65 éves és annál idősebb, $x \in \{65, 66, \ldots, 100\}$, teljes népesség körében megfigyelt mortalitási rátákat modelleztük 1970 és 2006 között (T = 37). Választásunk azért esett erre a korosztályra, mert szerepe a nyugdíjszámítás szempontjából meghatározó.

3. ábra. A 65 éves és annál idősebb teljes népesség körében megfigyelt mortalitási ráta logaritmusának alakulása 1970 és 2006 között

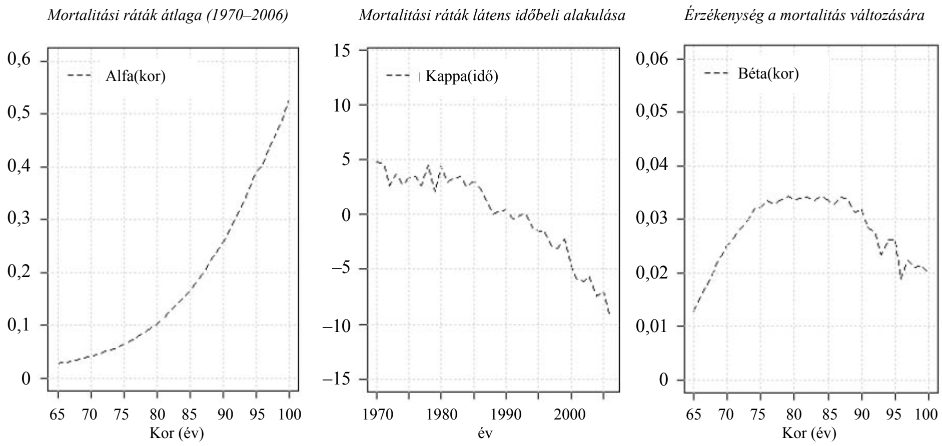


Megjegyzés. A mortalitási ráta logaritmusának –3,5-es, valamint –0,5-es értéke a mortalitási ráta körülbelül 0,03-os, illetve 0,6-es értékének felel meg.

A mortalitási rátákat a HMD-ből töltöttük le. Az adatbázis saját kalkulációk alapján publikál mortalitási rátákat és halandósági táblákat, valamint inputadatokat ez utóbbiak összeállításához. A halálozások számát a szakemberek elsődleges statisztikai adatokból nyerik, figyelembe véve a népszámlálási, valamint a születésszámra és a becsült népességszámra vonatkozó adatokat.

A 3. ábrán a halálozási ráták logaritmusát mutatjuk be két- és háromdimenziós formában, melyeknél annál világosabb színt használunk, minél magasabb a jelölt mortalitás. A bal oldalon azt láthatjuk, hogy ugyanaz a mortalitási szint egyre magasabb életkorhoz tartozik a naptári évek előrehaladtával, vagyis a mortalitási ráták az idővel párhuzamosan csökkennek. A háromdimenziós részen két dolgot is szemléltetünk. Egyrészt azt, hogy a felszínen számos egyenetlenség látható, amelyek összessége nem más, mint a mortalitási ráták körüli – korábban már részletezett – zaj. Minél magasabb az életkor, az egyenetlenség annál látványosabb, vagyis abszolút értelemben annál nagyobb. Másrészt az is jól látható, hogy a mortalitási ráták logaritmusa jól közelíthető valamilyen lineáris modellel.

4. ábra. A Lee–Carter-modell becsült paraméterei



A Lee–Carter-modell első lépése során a két kor- (α_x, β_x) és az időfüggő paramétert (κ_t) becsültük, melyeket a 4. ábrán szemléltetünk. A korspecifikus halandósági ráták empirikus átlagát bemutató első grafikonon jól látszik, hogy az (átlag) mortalitási ráták exponenciálisan növekednek a kor emelkedésével. A középsőn a mortalitási szint időbeli alakulását ábrázoljuk, ami alapján jól kivehető, hogy e mutató csak 1990 után kezdett meredekebben csökkenni. 1970 és 1990 között nagyobb ingadozásokat tapasztalunk, ami tulajdonképpen nem mond ellent annak a megfigyelésnek, hogy a várható élettartam az utóbbi húsz évben erőteljesebben nőtt. Végül, a harmadik grafikonon azt mutatjuk, hogy az egyes életkorok mennyire érzékenyek a mortalitási szint csökkenésére. Látható, hogy a 75 és 90 éves kor közötti értékek a legnagyobbak, vagyis ezek az életkorok azok, amelyek a leginkább hozzájárultak az időskori mortalitás csökkenéséhez 1970 és 2006 között.

A Lee–Carter-modell alkalmazásának második lépésében a középső grafikonon ábrázolt értékek idősorára ARIMA(0,1,0) modellt illesztettünk, ami nagyon jó illeszkedést, közel 92 százalékos R^2 értéket produkált. A becsült modell számokban a következő:

$$\tilde{\kappa}_t = \tilde{\kappa}_{t-1} - 0{,}359 + \delta_t \ ,$$

$$\sigma_{\hat{\theta}} = 0{,}160 \ ,$$

$$R^2 = 91{,}93\% \ .$$

A Lee–Carter-modell előrejelzései alapján kétféleképpen számolt egyéves túlélési valószínűségeket hasonlítottunk össze. (Lásd az 1. táblázatot.) Az első esetben e valószínűségek a 2006-ban megfigyelt értékeket jelzik, melyeket tipikusan keresztmetszeti halandósági táblában használhatunk fel. Az ez alapján számolt várható élettartam azt fejezi ki, hogy átlagosan hány évet élnek az emberek x éves koruk után, feltéve, hogy az x éves embereknek a t. időpontban ugyanolyan túlélési valószínűsége lesz $x + 1$ éves korukban $t + 1$. időpontban (feltételezés), mint azoknak, akik $x + 1$ évesek a t. időpontban (valóság).

1. táblázat

Keresztmetszeti és kohorsz egyéves túlélési valószínűségek különböző életkorokban

Életkor (év)	Keresztmetszeti (2006) $p(t)$*	Kohorsz (2006–2041)		
		Várható Érték** $E[p(t)]$	95 százalékos konfidenciaintervallum 1. modell	95 százalékos konfidenciaintervallum 2. modell
65	97,77	97,77	–	–
70	96,92	97,20	96,91 – 97,47	96,90 – 97,47
75	95,17	96,28	95,58 – 96,87	95,51 – 96,92
80	92,33	94,14	92,76 – 95,30	92,48 – 95,44
85	88,31	90,84	88,42 – 92,83	87,71 – 93,17
90	84,49	86,97	83,50 – 89,73	82,37 – 90,34

* Egyéves túlélési valószínűség, amely azt mutatja, hogy egy x éves személy életben lesz x+1 éves korában.

** Determinisztikus modellel (ami úgy tekint a mortalitási index jövőbeli értékeire, mintha azokat (múltbeli adatok alapján) biztosan tudnánk) kapott becslés.

Megjegyzés. Míg az 1. modell esetén a trendet adottnak és a mortalitási index jövőbeli alakulását bizonytalannak tekintjük, addig a 2. modellnél a mortalitási index jövőbeli alakulásának bizonytalansága mellett azt is figyelembe vesszük, hogy a trend szintén valószínűségi változó.

A keresztmetszetivel szemben a kohorsz megközelítés nem tekinti időben állandónak a túlélési valószínűségeket, viszont feltételezéssel él azok jövőbeli alakulásával kapcsolatban. Tulajdonképpen ebben segít a modell, amelynek eredményeit felhasználva kaptuk az előre jelzett túlélési valószínűségeket. (Lásd az 1. táblázat jobb oldalát.) 97,20 például azt a túlélési valószínűséget jelzi, amellyel várhatóan a 70 (65 + 5) éves korúak fognak szembesülni 2011-ben (2006 + 5).

Megbecsültük továbbá, hogy milyen bizonytalanság övezi a jövőbeli túlélési valószínűségeket. Ehhez a Lee–Carter-modell két változatát is használtuk. Az első esetben úgy tekintünk az általános mortalitási szint jövőbeli értékeire (κ_{T+s}), mintha a jövőbeli trendet biztosan tudnánk, és a véletlen csak a tendencia értékeinek megvalósulásában játszana szerepet. A második esetben viszont már magát a trendet is valószínűségi változónak vesszük. Ez a jövőbeli túlélési valószínűségek körüli „többletbizonytalanság” természetesen megjelenik a előrejelzésekben és emiatt az utóbbi modellel végzett becsléseinkben is.

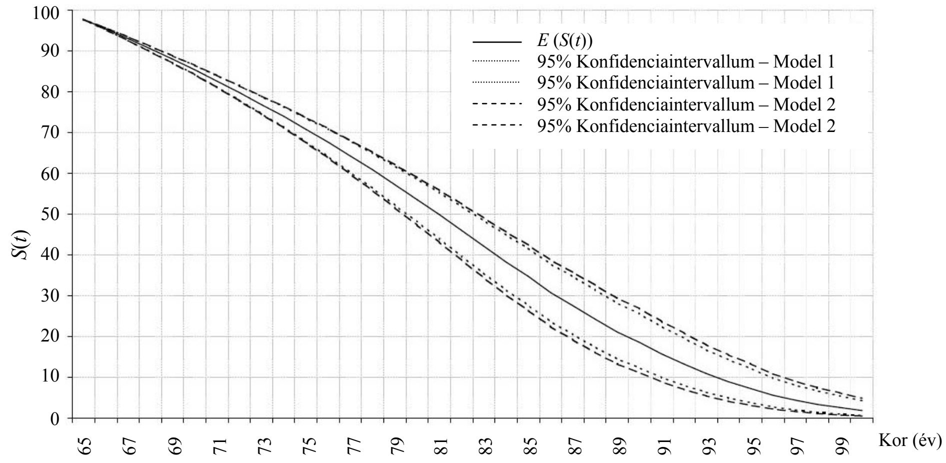
Az előre jelzett kohorsz túlélési valószínűségeinek várható értékei mindig nagyobbak a keresztmetszeti, 2006-ban megfigyelt túlélési valószínűségeknél. Ez annak az eredménye, hogy a halálozási valószínűségek idővel várhatóan csökkennek. Ugyanakkor minél későbbi időszakra próbáljuk előre jelezni a túlélési valószínűségi értékeket, annál nagyobb a bizonytalanság a prognózis körül. Míg például 2011-ben egy 70 éves személy túlélésének valószínűsége viszonylag pontosan megjósolható (az intervallum terjedelme 0,5–0,6 százalékpont), addig 2031-re egy 90 éves emberé már csak eléggé pontatlanul (8 százalékpont).

Az 5. ábrán azt szemléltetjük, hogy milyen halandósági viszonyok jellemzik a 2006-ban 65 évesek kohorszát. A grafikon a feltételes túlélési valószínűségeket mutatja, vagyis azt, hogy egy 100 fős kohorszból hányan élnék meg a 66., 67. stb. életévüket. Tulajdonképpen a bizonytalanság az egyes feltételes valószínűségek körül – mely eléggé tetemes az életpályák vége felé –, ami a nyugdíjbiztosítókat érinti. A legtágabb konfidenciaintervallum a 85–95 évesek körében tapasztalható.

A 2. táblázatban összehasonlítottuk a keresztmetszeti várható élettartamot a 2006-ban 65 éves kohorsz várható élettartamával, majd összevetettük, hogy milyen mértékben befolyásolják a különböző módon figyelembe vett túlélési valószínűségek a minden év elején 1 forintot fizető annuitás jelenértékét.

Míg a keresztmetszeti megközelítéssel számolt 65 éves korban hátralevő várható élettartam 2006-ban 15,39 év volt, addig a túlélési valószínűségek változását is figyelembe vevő kohorsz modell több mint egy teljes évvel magasabbra becsülte azt (16,43). Meg kell jegyezni azonban, hogy számottevő bizonytalanság övezi az utóbbi előrejelzést. Egy pesszimista szcenárió (a 95 százalékos konfidenciaintervallum alsó határa) szerint marginálisan van esély arra, hogy a várható élettartam valamelyest csökkenni fog (15,12), ugyanakkor az optimista változat (a 95 százalékos konfidenciaintervallum felső határa) alapján a vártnál gyorsabb emelkedésre is számíthatunk (17,83).

5. ábra. Túlélési valószínűség 65 éves kor felett



2. táblázat

*Várható élettartam és az azzal járó pénzügyi kockázat**

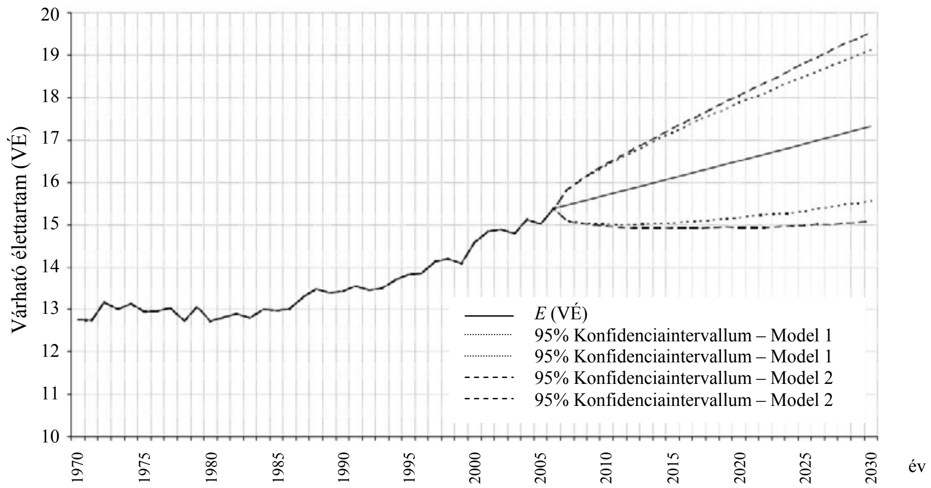
Várható élettartam				Annuitás jelenértéke			
Keresztmetszeti (2006) Várható érték	Kohorsz (2007–2042)			Keresztmetszeti (2006) Várható érték	Kohorsz (2007–2042)		
	Várható érték**	95 százalékos konfidencia-intervallum	95 százalékos konfidencia-intervallum		Várható érték**	95 százalékos konfidencia–intervallum	95 százalékos konfidencia–intervallum
		1. modell	2. modell			1. modell	2. modell
15,39	16,43	15,35–17,59	15,12–17,83	11,87	12,43	11,82–13,05	11,70–13,17

* 3 százalékos kamatlábat feltételezve.
** Determinisztikus modellel kapott becslés.
Megjegyzés. Míg az 1. modell esetén a trendet adottnak és a mortalitási index jövőbeli alakulását bizonytalannak tekintjük, addig a 2. modellnél a mortalitási index jövőbeli alakulásának bizonytalansága mellett azt is figyelembe vesszük, hogy a trend szintén valószínűségi változó.

Ami az annuitásfizetési kötelezettség értéke körüli pénzügyi kockázatokat illeti, 3 százalékos kamatláb mellett az annuitás jelenértéke 11,87 egység keresztmetszeti, míg 12,43 egység kohorsz halandósági táblával számolva. A várható élettartamoknak megfelelően ugyan van némi esély arra vonatkozóan, hogy az annuitás jelenértéke kisebb (11,70), mint a keresztmetszeti modellel számolt, de arra is, hogy a jelenérték lényegesen alulbecsült a valóshoz képest (13,17).

Természetesen az előző okfejtés nem jelenti azt, hogy a keresztmetszeti várható élettartam számítás semmire sem használható, csupán arról van szó, hogy a várható élettartam pénzügyi kockázatának számszerűsítése során a kohorsz modellek jobban megragadják a problémát. Keresztmetszeti várható élettartamot minden ország statisztikai hivatala közzétesz, melynek időbeli alakulása az adott populáció (ország) egészségi állapotának egyik legfontosabb jelzőszáma. Ezért olyan indikátorként is felfogható, ami a populáció halálozási viszonyait összefoglaló mértékegységgel adja meg egy kiválasztott időszakra nézve. Ennek múltbeli és jövőre vonatkozó értékeit a 6. ábrán mutatjuk be.

6. ábra. Keresztmetszeti várható élettartam 65 éves korban 1970 és 2030 között



4. Összefoglalás

Tanulmányunkban áttekintettük a mortalitás csökkenésének szerepét a várható élettartam számításában, kifejtettük az élettartam-kockázatot, valamint annak jelentőségét. A Lee–Carter-módszerrel modelleztük az időskori várható élettartam jövőbeli alakulását, az akörüli bizonytalanság nagyságát, illetve annak pénzügyi vonatkozását, magyar adatokat alapul véve.

A bemutatott modellt és annak hazai alkalmazását alapvetően a várható élettartam növekedése körüli bizonytalanság szemléltetésére szántuk. Példánkban a férfiak és a nők összevontan szerepeltek, mivel a nyugdíjszámítás során a halandóság elemzése unisex mortalitási adatokon alapul. Az életbiztosítási gyakorlatban a két nemre külön modelleket is illeszthetünk, mivel ezek halálozási kockázatukban és annak időbeli alakulásában eltérnek egymástól. Ugyanakkor további felbontás is elképzelhető, hiszen közismert, hogy az iskolázottabb, magasabb társadalmi-gazdasági helyzetű csoportok, házasságban élő emberek tovább élnek, mint a rosszabb körülmények között vagy az egyedül élők.

Tanulmányunk nem az első, amely Lee–Carter-modellt illeszt magyar halálozási adatokra. Korábban *Baran* és szerzőtársai [2006] készítettek becsléseket arra vonatkozóan, hogy mekkora mortalitási rátákra számíthatunk a jövőben 0 és 100 éves kor között. A szerzők két időszakot vizsgálva modellezték ezek múlt- és várható jövőbeli értékeit, egyrészt az 1949 és 2003 közötti időszak halálozási viszonyaira építve, másrészt az 1989-től 2003-ig tartó éveket alapul véve. A megkülönböztetésre azért volt szükség, mert 1949 és 2003 között a magyar halálozási ráták alakulása az 1989 és 2003 közötti évekkel, valamint általában a nyugati országokkal ellentétben nem volt egyenletes. Ez különösen a középkorú magyar férfi népességre vonatkozóan igaz, amely az elmúlt 50 évben ebben a tekintetben hullámzó tendenciát mutatott. A Lee–Carter-modell klasszikus módszertanának eredeti formájában történő alkalmazása (lineárisan csökkenő mortalitás) az összes életkor együttes modellezésére legfőképpen ezért nem megfelelő. Az idő és a mortalitási indexek nemlineáris kapcsolatát más regressziós modellel (például nemlineáris idősorelemzési technikával) vagy kohorsz hatásokat is figyelembe vevő Lee–Carter-modellel lehetne kezelni (*Renshaw–Haberman* [2006]).

Jelen publikációnk több tekintetben is eltér a Baran-féle tanulmánytól, ezért az eredmények közvetlen összehasonlítása nem lehetséges. A legfőbb különbségek a modellezett múltbéli adatokban, az életkorokban, valamint a becsült modellben rejlenek. Velünk ellentétben Baran és társai három sajátérték-faktort használtak a jobb illeszkedés érdekében, illetve elhagyták a mortalitási indexek kiigazítását. A kezdeti feltételek különbségei megmutatkoznak az eredményekben is: míg tanulmányuk rávilágított arra, hogy a halálozási valószínűség nem minden korban csökkent egyenletesen, addig nekünk, csupán a nyugdíjkorhatár feletti népességre koncentrálva, ezzel a nehézséggel nem kellett szembenéznünk. Megjegyzendő azonban, hogy bármelyik modellezett időszakot alapul véve szerintük (is) alapvetően linárisan csökkent az időskori halálozás. E tekintetben tehát az eredmények összhangban vannak egymással.

Egy másik magyar tanulmány az előbbiektől eltérő módszert alkalmazott (*Arató–Bozsó–Elek* [2009]). A szerzők a mortalitási trend becslésére kerestek alternatív megoldást és alapötletük, egyben feltételezésük az volt, hogy a magyar mortalitás várhatóan hasonlóan alakul a jövőben, mint ahogy egy másik, a jelenlegi magyar viszonyokhoz hasonló ország halandósága a múltban. Sajnos előre jelzett halálozási rátákat nem tettek közzé, így a két modell összehasonlítása ugyancsak nem volt lehetséges.

Az utóbbi 20 év során számos szerző javasolt módosításokat az eredeti Lee–Carter-modellen, többen a halálozási ráta helyett a halálozási valószínűséget modellezték. A modern Lee–Carter-típusú modellek a halálozást Poisson (*Brouhns–Denuit–Vermunt* [2002]) vagy binomiális (*Cossette et al.* [2007]) valószínűségi változóval írják le, de a módszer kiterjeszthető olyan halandósági táblákra is, amelyekben több (egészségi) állapotot különböztetünk meg. Ekkor a mortalitási ráta helyett az átmenet-valószínűségeket modellezzük (*Májer et al*. [2011]). E modellek tudnának választ adni többek között arra a kérdésre is, hogy milyen módon változott a múltban és fog várhatóan változni a jövőben a munkaképes személyek várható életkora.

A számos kiterjesztési lehetőség tekintetében modellünk csupán a kezdő lépés és inkább leíró, a problémát szemléltetni kívánó alkalmazás, mintsem kiforrott, minden feltételnek megfelelő vállalkozás. Mindez azonban nem befolyásolja hitelességét, hiszen már egy ilyen egyszerű modell is jól jellemzi a mortalitást és az akörüli jövőbeli bizonytalanságot. Ezen kívül meg kell említenünk, hogy tanulmányunk csupán egy vékony szelete annak a szakirodalomnak és a vállalati szektorban alkalmazott módszertannak, amely felöleli az emberi élettartam változásának vizsgálatát a nyugdíj- és annuitás szektorokban, beleértve a mortalitás modellezésének és előrejelzésének más lehetőségeit, valamint aktuáriusi vonatkozásait és a kockázatok kezelését is. Egy átfogó és alapos összefoglalásra kíváncsi olvasónak pedig *Girosi–King* [2008] és *Pitacco et al*. [2009] nemrég megjelent könyveit hozhatjuk fel példaként.

Tekintve, hogy az egyre idősödő európai társadalmakban a nyugdíj és a nyugdíjkorhatár központi gazdasági és politikai kérdés már most is, cikkünk aktualitása egyre nagyobb. A legtöbb fejlett országban az állam a felosztó-kirovó elven begyűjtött járulékot osztja szét a nyugdíjasok között, így megkerülhetetlen annak elemzése, hogy a befizetett járulék és a kiosztott járadék egyéni és generációs szinten egyensúlyban van-e. A magyar adatok vizsgálata azért is nélkülözhetetlen, mert az 1950-es évek elején született nagyon népes Ratkó-generáció tagjai ebben az évtizedben elérik a nyugdíjkorhatárt. Feltételezhető, hogy ez a csoport tovább fog élni, mint a második világháború alatt vagy közvetlenül utána született kohorsz, tehát tovább részesül majd nyugdíjban. Ugyanakkor az őket követő kohorszok létszáma és gazdasági aktivitása kisebb, ezért nem hárítható teljes mértékben rájuk a nyugdíjkifizetések terhe (*MeH* [2010]). További hitelekből sem fizethető nyugdíj, hisz a törlesztés terhe is a fiatalabb népesség vállát nyomná. Az áttérés a szolgáltatással meghatározottról a befizetéssel meghatározott nyugdíjra megosztja a hosszú élet kockázatát a két generáció között, és ezáltal méltányosabban terheli a fiatalabb korcsoportokat. A névleges egyéni számlás rendszerre való átmenet kidolgozása, és bevezetésének megtervezése azonban nem végezhető el az élettartam-kockázat modellezése és ismételt becslése nélkül.

Irodalom

ARATÓ, M – BOZSÓ, D. – ELEK, P. [2009] Forecasting and Simulating Mortality Tables. *Mathematical and Computer Modelling*. Vol. 49. No. 3–4. pp. 805–813.

BANYÁR J. – MÉSZÁROS J. [2003]: *Egy lehetséges és kívánatos nyugdíjrendszer*. Gondolat. Budapest.

BARAN, S. – GÁLL, J. – ISPÁNY, M. – PAP, G. [2007]: Forecasting Hungarian Mortality Rates Using the Lee–Carter Method. *Acta Oeconomica*. Vol. 57. No. 1. pp. 21–34.

BROUHNS, N. – DENUIT, M. – VERMUNT, J. K. [2002]: A Poisson Log-Bilinear Regression Approach to the Construction of Projected Lifetables. *Insurance*: *Mathematics and Economics*. Vol. 31. No. 3. pp. 373–393.

CARNES, B. – OLSHANSKY, S. – GRAHN, D. [2003]: Biological Evidence for Limits to the Duration of Life. *Biogerontology*. Vol. 4. No. 1. pp. 31–45.

COSSETTE, H. – DELWARDE, A. – DENUIT, M. – GUILLOT, F. – MARCEAU, E. [2007]: Pension Plan Valuation and Mortality Projection: A Case Study with Mortality Data. *North American Actuarial Journal*. Vol. 11. No. 2. pp. 1–34.

DE WAEGENAERE, A. – MELENBERG, B. – STEVENS, R. [2010]: Longevity Risk. *De Economist.* Vol. 158. No. 2. pp. 151–192.

DEATON, A. – PAXSON, C. [2004]: Mortality, Income, and Income Inequality Over Time in Britain and the United States. In: *Wise, D. A.* (ed.): *Perspectives on the Economics of Aging*. The University of Chicago Press. Chicago. pp. 247–285.

GARSSEN, J. [2006]: *Will Life Expectancy Continue to Increase or Level Off? Weighing the Arguments of Optimists and Pessimists.* Statistics Netherlands. Voorburg, Heerlen.

GIROSI, F. – KING, G. [2008]: *Demographic Forecasting.* Princetown University Press. Princetown.

HÁRI, N. – DE WAEGENAERE, A. – MELENBERG, B. – NIJMAN, T. E. [2008]: Longevity Risk in Portfolios of Pension Annuities. *Insurance: Mathematics and Economics.* Vol. 42. No. 2. pp. 505–551.

JANSSEN, F. – MACKENBACH, J. P. – KUNST, A. E. [2004]: Trends in Old-Age Mortality in Seven European Countries, 1950–1999. *Journal of Clinical Epidemiology*. Vol. 57. No. 2. pp. 203–216.

LEE, R. [2001]: Predicting Human Longevity. *Science.* Vol. 292. No. 5522. pp. 1654–1655.

LEE, R. D. – CARTER, L. R. [1992]: Modeling and Forecasting U.S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association.* Vol. 87. No. 419. pp. 659–671.

MÁJER, I. M. – STEVENS, R. – NUSSELDER, J. W. – MACKENBACH, J. P. – VAN BAAL, P. H. M. [2011]: *Modelling and Forecasting Health Expectancy; Theoretical Framework and Application*. Netspar Discussion Papers 01/2011-009. http://arno.uvt.nl/show.cgi?fid=113977

MEH (MINISZTERELNÖKI HIVATAL) [2010]: J*elentés a Nyugdíj és Időskor Kerekasztal tevékenységéről*. Budapest.

NUSSELDER, W. J. – PEETERS, A. [2006]: Successful Aging: Measuring the Years Lived with Functional Loss. *Journal of Epidemiology and Community Health.* Vol. 60. No. 5. pp. 448–455.

OEPPEN, J. – VAUPEL, J. W. [2002]: Demography. Broken Limits to Life Expectancy. *Science.* Vol. 296. No. 5570. pp. 1029–1031.

OLSHANSKY, S. J. – CARNES, B. A. – DESESQUELLES, A. [2001]: Demography. Prospects for Human Longevity. *Science.* Vol. 291. No. 5508. pp. 1491–1492.

OLSHANSKY, S. J. – HAYFLICK, L. – CARNES, B. A. [2002]: No Truth to the Fountain of Youth. *Scientific American.* Vol. 286. No. 6. pp. 92–95.

PITACCO, E. – DENUIT, M. – HABERMAN, S. – OLIVIERI, A. [2009]: *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business.* Oxford University Press. Oxford.

RENSHAW, A. E. – HABERMAN, S. [2003]: On the Forecasting of Mortality Reduction Factors. *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol. 32. No. 3. pp. 379–401.

RENSHAW, A. E. – HABERMAN, S. [2006]: A Cohort-Based Extension to the Lee–Carter Model for Mortality Reduction Factors. *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol. 38. No. 3. pp. 556–570.

VAUPEL, J. W. – CAREY, J. R. – CHRISTENSEN, K. – JOHNSON, T. E. – YASHIN, A. I. – HOLM, N. V. – IACHINE, I. A. – KANNISTO, V. – KHAZAELI, A. A. – LIEDO, P. – LONGO, V. D. – ZENG, Y. – MANTON, K. G. – CURTSINGER, J. W. [1998]: Biodemographic Trajectories of Longevity. *Science.* Vol. 280. No. 5365. pp. 855–860.

Summary

Over the last decades improving mortality conditions have resulted in increasing length of human life and subsequent population ageing in most western countries. The continuous rise of life expectancy is certainly welcomed; however, these developments have considerable consequences for the sustainability of two fundamental institutions of social security: health care and pensions. The concern is that health insurers and pension funds will have to provide health care and retirement income for however long the people live, whereas certain financial products (including pension annuity) are highly dependent on future life expectancy, which carries potential risks. The primary goal of the study is to model and forecast life expectancy and its uncertainty level in Hungary.