

## Időben változó együttthatójú ökonometriai modellek\*

---

**Varga Balázs,**  
az OTP Alapkezelő Zrt.  
kvantitatív elemzője;  
a Budapesti Corvinus Egyetem  
PhD-hallgatója  
E-mail: balazs.varga@uni-  
corvinus.hu

A tanulmány bevezetést nyújt az időben változó együttthatójú lineáris ökonometriai modellek megoldási módozataiba és elemzi ökonometriai képességeiket. Először az állapot-tér modellkeretben működő Kalman-szűrőt és a hozzá szorosan kapcsolódó (ám kevésbé ismert) rugalmas legkisebb négyzetek eljárást ismerteti, majd az alternatívaként használható Markov-típusú rezsimváltó modellt mutatja be. A szerző a két modelleszámítás képességeit és annak közönséges legkisebb négyzetek módszeréhez való viszonyát szimulációkkal illusztrálja.

TÁRGYSZÓ:  
Lineáris modell.

---

\* A kutatás az OTKA 73782. számú támogatása révén valósult meg. Jelen tanulmány a kutatási összefoglaló ([http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/307/1/wp\\_2010\\_4\\_varga.pdf](http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/307/1/wp_2010_4_varga.pdf)) átdolgozott, szerkesztett változata. A szerző köszönettel tartozik *Darvas Zsolt*, valamint a magát megnevezni nem kívánó lektor tanácsaiért.

A XX. század közgazdasági összefüggéseinek túlnyomó többségét formálisan lineáris modellként fogalmazták meg. Ez a feltevés azért bizonyult univerzálisnak, mert ha a valós összefüggés mégsem lineáris (esetleg lineárisra alakítható), a folytonosság miatt, egy korlátozott tartományon még mindig közelíthető akként. Ennek megfelelően a lineáris modellt alapvetően két okból lehet elvetni: vagy olyan nemlineáris összefüggéssel állunk szemben, amely az általunk vizsgált tartományon nem tekinthető már lineárisnak, vagy a minta időbelisége miatt az összefüggés megváltozik, ami ugyancsak elrontja lineáris becslésünket. Mindkettőre számos példát találunk, hiszen egyrészt a közgazdaságtan sok összefüggése nemlineáris, kezdve a fogyasztók hasznossági függvényétől a modern neurális hálókig; másrészt a makroökonómiai idősorokban régóta keresnek strukturális töréseket, a híres Lucas-kritika pedig egyenesen intézményesítette a gazdasági szereplők viselkedésének időbeli változását.

Granger [2008] egyik utolsó írásában szembeállítja egymással a nemlineáris, valamint az időben változó együtthatójú modelleket, azzal érvelve, hogy utóbbiak jobban értelmezhetők közgazdaságilag, valamint könnyebben készíthető belőlük többidőszakos előrejelzés is. Gondolatsorának központi eleme a White-tétel, amely azt mondja ki, hogy tetszőleges véges és nem nulla várható értékű  $y_t$  idősor leírható olyan AR(1) modellel, amelynek együtthatója időben változik – pontosabban megfogalmazva létezik olyan  $\beta_t$   $t-1$ . időszaki filtrációra ( $F_{t-1}$ -re) mérhető sorozat, és  $\varepsilon_t$  martingáldifferencia-idősor, melyekre

$$y_t = \beta_t y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad /1/$$

Granger ezzel a tétellel azt mutatja be, hogy bármilyen – akár nemlineáris adatgeneráló folyamatból származó – mintára illeszthető időben változó együtthatójú lineáris modell. Tudnunk kell azonban, hogy ez bizonyos formában fordítva is igaz: ha nemlineáris modellspecifikációkat kellően rugalmasra alakítjuk (például elég nagy fokszámú polinomot veszünk), azzal is tetszőlegesen jól le tudunk írni bármilyen folyamatot.

Tanulmányunk az időben változó együtthatójú modellek többféle becslési módját mutatja be, és szimuláció segítségével hasonlítja össze a képességeiket. Célunk egyrészt az, hogy ezekről a becslési eljárásokról átfogó képet nyújtsunk az Olvasó számára – rávilágítva az egyes eljárások közötti kapcsolatokra és különbségekre –, másrészt útmutatást nyújtsunk, hogy milyen helyzetben melyik módszer használata lehet a megfelelőbb. Az alapvető egyenlet, amellyel foglalkozunk, az /1/ összefüggés né-

miképp általánosított formája, ahol a jobb oldalon bármilyen exogén vagy késleltetett endogén (predeterminált) változók  $p$  elemű lineáris kombinációja állhat, a függő változónk az egyszerűség kedvéért skálár:

$$y_t = \beta_t' x_t + \varepsilon_t. \quad /2/$$

Ebben a keretben tehát  $\beta_t$  egy  $p \times 1$  méretű oszlopvektor értékei, amelyeknek időbeli sorozataira vagyunk kíváncsiak. A klasszikusnak nevezhető megoldás *Kalman* [1960] nevéhez fűződik, aki elindította útjukon az időben változó együttthatójú modelleket, amelyek alkalmazásaikkal azóta is jelen vannak a közgazdaságtanban. Az egyenlet – mint később meg is mutatjuk – kiegészíthető állapot-tér modellé, amely becsülhető a Kalman-szűrővel, ami nagyon sok – főleg mérnöki – alkalmazásban bizonyított.

A Kalman-szűrő sikerének oka részint az, hogy feltevéseit tovább lehet lazítani az eredetileg megadottaktól, így például az eloszlási kitételek nagy részét ejthetjük. Ezen az alapon született meg 1988-ban *Kalaba* és *Tesfatsion* ([1988], [1989], [1990a]) jóvoltából az ún. rugalmas legkisebb négyzetek módszere (flexible least squares – FLS). Ez az eljárás gyakorlatilag bemutatja, hogy a Kalman-szűrő egyenleteit máshonnan kiindulva is levezethetjük, egyfajta négyzetes veszteségfüggvény minimalizálásaként. A szakirodalomban nem túl aktív, de hosszan tartó vita volt a két módszer közötti különbségekről, melyekre *Montana*, *Triantafyllopoulos* és *Tsagaris* [2009] tett végül pontot; cikkünkben összefoglaljuk ezen írás eredményeit is.

A Kalman-modellcsalád mellett egy másik megközelítés is használható időben változó együttthatójú folyamatok vizsgálatára. Megadhatunk az ismeretlen vektor egyes elemeinek véges sok állapotot – más néven rezsimet – is, amelyek közötti átmeneti valószínűségek segítségével minden időpontban becslést adhatunk az aktuális állapot valószínűség-eloszlására. Ez a Markov-típusú rezsimváltó modell (Markov switching model – MSW)<sup>1</sup> egy speciális esete, melyet a közgazdasági idősorelemzésben először *Hamilton* [1989] alkalmazott, miután adaptálta *Goldfeld* és *Quandt* [1973] keresztmetszeti rezsimváltó regresszióját. A Markov-modell jóval általánosabb annál, minthogy csak időben változó együttthatójú egyenleteket vagy állapot-tér rendszereket becsülhessünk vele, ugyanakkor több közös vonása van a Kalman-szűrővel, amint erre a későbbiekben rámutatunk.

A becslőeljárások bemutatása után természetesen felmerül a kérdés, hogy melyikük mennyire használható a gyakorlatban, illetve hogyan teljesítenek egy egyszerű OLS-becsléssel szemben. Ezért olyan modellt építünk, ahol a becslendő együtttható időben különböző jellegű pályákat fut be, miközben más, zavaró együtttható is jelen

<sup>1</sup> A Markov switching model elnevezés leginkább a közgazdasági alkalmazásokban terjedt el, más diszciplínákban, ahol egyébként jóval régebb óta ismert, Hidden Markov Model (HMM – rejtett Markov-modell) névvel és rövidítéssel illetik.

van. A rendszert ezután kellően sokszor szimuláljuk és az eljárásaink segítségével visszabecsüljük, végül pedig összehasonlítjuk a becslések hatékonyságát.

Írásunk további része a következőképpen szerveződik: bemutatjuk a Kalman-szűrőt, a rugalmas legkisebb négyzeteket, rávilágítunk a kettő közötti szoros kapcsolatra, ezután a Markov rezsímváltó modell kerül sorra, majd szimulációs módszerekkel illusztráljuk az eljárások képességeit, végül összefoglaljuk az eredményeket.

## 1. A Kalman-szűrő

Az általános állapot-tér modell egy olyan dinamikus, lineáris rendszer leírása, amelyben három változócsoporthoz jelenik meg: az  $u_t$  bemeneti, a  $\xi_t$  állapot-, valamint az  $y_t$  kimeneti vagy megfigyelési változók. A feltevések szerint a rendszer állapot-dinamikáját egy elsőrendű differenciaegyenlet írja le, melyben a bemeneti változók is szerepelhetnek; ez az ún. állapotegyenlet:

$$\xi_t = A\xi_{t-1} + Bu_{t-1} + \omega_t. \quad /3/$$

A megfigyelési egyenlet lineárisan összeköti az állapot- és kimeneti változókat, itt is megengedve az inputok hatását:

$$y_t = C\xi_t + Du_t + \varepsilon_t. \quad /4/$$

A bemeneti változók tehát mindkét másik csoportra – regresszoroknak is hívhatnánk őket – hatnak, az állapot- és kimeneti változókat pedig azért kell megkülönböztetnünk egymástól, mert az előbbieket nem feltétlenül tudjuk mérni. Ezek a modell rejtett, látens változói, amelyek értékéről csak közvetetten, a megfigyeléseken keresztül kapunk információt. A /3/ és /4/ egyenletpárban additív hibtagokat feltételezünk, ezekről szigorú feltevessel kell élnünk: mindkét hibtagvektor rögzített korrelációs mátrixokkal rendelkezik, autokorrelálatlan, és a két vektor bármely tagjának bármely késleltetésre vonatkozó korrelációja is nulla. E két egyenlettel jellemzett állapot-tér modell diszkrét, mivel időben nem folytonos változóknak írtuk fel. A modellt leíró  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  mátrixok változhatnak az időben.

Az időben változó együtthatójú regressziót úgy tudjuk állapot-tér keretbe foglalni, hogy a  $\beta_t$  együtthatóvektort tesszük meg állapotvektornak, amelynek a dinamikája adja a rendszer állapotegyenletét. Például, ha az együtthatókról (állapotvektorokról) azt feltételezzük, hogy eltolás nélküli egységgyökfolyamatot követnek, akkor:

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \omega_t. \quad /5/$$

Az egyenletben az  $\omega_t$  hibatag várható értéke nulla, kovarianciamátrixa  $V_\omega$ . A megfigyelési egyenlet pedig nem más, mint maga a regresszió, amelynek hibavektora  $\varepsilon_t$ , nulla várható értékkel és  $V_\varepsilon$  kovarianciamátrixszal:

$$y_t = \beta_t' x_t + \varepsilon_t. \quad /6/$$

Figyeljük meg, hogy a /4/ egyenlet  $C$  mátrixának az itteni  $x_t$  regresszorok vektora felel meg, és mivel azok értéke időfüggő, így az állapot-tér rendszerünk is azzá válik. A hibatagokról az általános modellnek megfelelően fel kell még tennünk, hogy bármely késleltetésre mind az auto-, mind a keresztkorrelációik nullák, továbbá bármely  $t$  időpontra az értékük korrelálatlan a  $\beta_0$  kezdeti állapottal. A Kalman-szűrő eredeti megfogalmazásában és bizonyításában (Kalman [1960]) szerepet kap a hiba-folyamatok normalitásának feltevése, azonban többen bizonyították már (Montana–Triantafyllopoulos–Tsagaris [2009], Eubank [2006]), hogy a továbbiakban itt leírt következtetésekhez ez nem szükséges.

Maga a szűrő nem más, mint négyzetes értelemben vett optimális, lineáris algoritmus az állapotvektor becslésére, amely lépésről lépésre frissül, ahogy haladunk előre az időben. A becslésnek alapvetően két része van: a predikció és a korrekció. Az előbbi során a  $t-1$ . időszakban már rendelkezésünkre áll az állapot szintén erre az időszakra vonatkozó  $\beta_{t-1|t-1}$  becslése, így az állapotegyenletet használva kivetítjük azt egy időszakkal előre, képezve  $\beta_{t|t-1}$ -t a  $t$ . időszaki érték becslését a  $t-1$ . időszakból. Esetünkben az állapotegyenlet egyszerűsége miatt

$$\beta_{t|t-1} = \beta_{t-1|t-1}. \quad /7/$$

A korrekció során beérkeznek a  $t$ . időpontra vonatkozó megfigyelési adatok, amelyek segítségével frissítjük az erre az időpontra vonatkozó becslésünket. Az algoritmus linearitása itt jelenik meg: az állapotvektor becslését a megfigyelés lineáris függvényében keressük. Ráadásul, mivel a megfigyelési egyenletünk lineáris, így abból kifejezhetjük az  $e_t$  megfigyelési hibát, miközben az állapotra vonatkozó becslés annak is lineáris függvénye marad. Megmutatható, hogy a keresett lineáris összefüggés konstansa éppen a frissítendő állapot lesz:

$$\beta_{t|t} = \beta_{t|t-1} + K_t e_t, \quad /8/$$

ahol tehát a megfigyelési hiba összefüggése

$$e_t = y_t - \beta_{t|t-1}' x_t = y_t - y_{t|t-1}. \quad /9/$$

Annak igazolása, hogy a /8/ egyenlet konstansa épp a  $\beta_{t|t-1}$  becslés lesz, egyébként abból fakad, hogy a becslés minimalizálni kívánja a megfigyelési hibák négy-

zetösszegét a teljes  $1,2,\dots,T$  intervallumon. A keresendő  $K_t$  mátrix (ami esetünkben  $p \times 1$ -es oszlopvektor) Kalman-erősítés (Kalman gain) néven ismert és abban az értelemben optimális, hogy minimalizálja az állapotvektor adott időszaki becslése és valódi értéke közötti négyzetes eltérések összegét. A levezetéseket itt is mellőzzük, viszont a képletek megértéséhez definiálnunk kell néhány újabb jelölést. Legyen a valódi  $\beta_t$  vektor és a  $\beta_{t|t}$  korrigált becslés kovarianciamátrixa  $P_t$ , a  $\beta_t$  és a  $\beta_{t|t-1}$  prediktált becslés kovarianciamátrixa pedig  $R_t$ , végül az  $y_{t|t-1}$  időszakos becslés varianciája  $Q_t$  (esetünkben ez skalár). A következő két összefüggés könnyen látható, ha a rendszer állapot- és megfigyelési egyenleteit „kovarianciaegyenletbe” fordítjuk, ügyelve a korrelálatlansági feltevéseinkre:

$$R_t = P_{t-1} + V_w, \quad /10/$$

ez lényegében az állapotegyenlet kifejezése kovarianciamátrixokkal, és

$$Q_t = x_t' R_t x_t + V_\varepsilon, \quad /11/$$

ez pedig a megfigyelési egyenlet megfelelője. Most már tehát megadhatjuk az optimális erősítési mátrixot, ami nem más, mint

$$K_t = R_t x_t / Q_t, \quad /12/$$

aminek segítségével végül kifejezhetjük a  $P_t$  mátrix rekurzióját is:

$$P_t = R_t - Q_t K_t K_t'. \quad /13/$$

Készen állunk tehát a rekurzió egyenleteivel, hiszen ezek segítségével végig tudunk haladni az állapotvektor és annak  $P_t$  kovarianciamátrixa becslésén, ahogyan az új megfigyelések fokozatosan beérkeznek – persze, ha kezdetben megvannak a megfelelő  $\beta_{1|0}$  és  $P_0$  kiinduló értékeink.

Felépítése folytán a Kalman-szűrő alkalmas arra, hogy valós idejű alkalmazásokban működjön, hiszen az újabb állapotérték kiszámításához, a predikció és a korrekció előregörgetéséhez elegendő egyetlen újabb megfigyelt adatpont. Ezért az elmúlt fél évszázadban nagyon elterjedté vált különböző gyakorlati megvalósításokban, különösen a térben mozgó objektumok (repülőgépek, műholdak) helyzetének becslésében. A közgazdaságtanban is vannak területek, ahol jó kilátásokkal használhatjuk valós idejű alkalmazásként (gondoljunk a kereskedési stratégiákra, ahol az információhoz fokozatosan jutunk hozzá), viszont az ökonometriában jellemzőbb az a forma, ahol az adathalmaz már teljes egészében rendelkezésre áll, és nem csak a legutolsó (vagy aktuális) állapotvektor képezi az érdeklődés tárgyát. Ekkor alkalmazhatjuk a

Kalman-simító eljárást (Kalman-smoother), ami az adott adathalmaz összes pontját felhasználja. Pontosabban szólva könnyen belátható, hogy a  $t$ . időszaki simított becslés előállításához elegendő a  $t+1$ . időszaki simított becslés és a  $t$ . időszaki megfigyelés, így a simító eljárás nem más, mint egyfajta „visszalépdelés” az időben. Láthatjuk tehát, hogy ami összeköti a szűrt és simított becslött állapotvektorokat, nem más, mint az utolsó időszaki – azonos – érték.

Ez idáig semmilyen eloszlási feltevést sem tettünk, viszont a  $V_{\omega}$  és  $V_{\varepsilon}$  kovarianciamátrixokat teljes mértékben ismertnek feltételeztük. Amennyiben szükségünk van ezek becslésére, a maximum likelihood (ML) módszert könnyen alkalmazhatjuk, miután persze specifikáltuk az  $\omega_t$  és  $\varepsilon_t$  hibatagok eloszlását. Itt tehát már szükségünk van normalitási (vagy esetleg egyéb eloszlási) feltevésekre. A szimulációban vizsgálni fogjuk az így szűrt és simított becslés különbözőségét is.

A Kalman-szűrő irodalma óriási, használata a közgazdaságtanban az 1990-es évekre széles körben elterjedt, akár változó együtthatójú regressziókkal, akár bonyolultabb állapot-tér modellekkel. Ekkorra már a módszer elméleti és szimulációs tulajdonságait is megvizsgálták, ez azonban – a más tudományágbeli alkalmazások miatt – nem a közgazdászok érdeme volt (az időben változó együtthatójú regresszió különböző elméleti tulajdonságairól lásd például *Guo* [1990] cikkét és egyéb munkáit). A közgazdasági alkalmazásokról viszont kifejezetten ökonometriai könyvet írt *Harvey* [1989], valamint a szűrő és simító becslés szabatos matematikai levezetése megtalálható *Hamilton* [1994] idősorelemzés alapművében.

Végül a makroökonómiai alkalmazásokhoz – a teljesség igénye nélkül – igyekszünk némi irodalmat adni. Sok, korábban konstansnak feltételezett látens változót modelleznek Kalman-szűrővel, így a semleges kamatlábat (*Horváth* [2007]), a munkanélküliség természetes rátáját (*Driver–Greenslade–Pierse* [2006]) vagy a fiskális politika hatását (*Cimadomo–Garnier–Schalck* [2007]). A monetáris transzmissziót a kelet-közép európai országok viszonylatában *Darvas* [2009] elemezte időben változó együtthatójú strukturális vektor-autoregresszióval. Az időben változó inflációs perzisztencia vizsgálatát többváltozós (*Beechey–Österholm* [2007], *Dossche–Everaert* [2005]) és egyváltozós modellkeretben (*Darvas–Varga* [2010]) is megkísérelték Kalman-szűrővel. *Darvas* és *Simon* [2002] a potenciális kibocsátásra írt fel új szerű állapot-tér modellt.

## 2. A rugalmas legkisebb négyzetek módszere és kapcsolata a Kalman-szűrővel

Felejtjük el egy pillanatra az időben változó együtthatóvektort, és idézzük fel a közönséges legkisebb négyzetek módszerét! Az OLS-együtthatók becsléséhez

több kiindulási feltevésből (mint például a momentumok módszeréből) is eljuthatunk, a legtöbbször emlegetett négyzetes közelítés azonban nem más, mint a következőképpen definiált költség- vagy veszteségfüggvény felírása:

$$C(\beta) = \sum_{t=1}^T (y_t - \beta'x_t)^2 . \quad /14/$$

Ezt a célfüggvényt úgy is átfogalmazhatjuk, hogy feltevésünk szerint a függő változó valós és illesztett értéke közötti eltérés „közel nulla” kell legyen, amit jelöléssel akár így is írhatunk:

$$y_t - \beta'x_t \approx 0 . \quad /15/$$

*Kalaba és Tesfatsion* ([1988], [1989], [1990a]) éppen ezzel a formalizmussal jelezte azt, hogy a kifejezés bal oldalát négyzetes értelemben minimalizálja, viszont az általunk már jól ismert „véletlen eltérésváltozó” fogalmat egyáltalán nem kívánta bevezetni, az ugyanis eloszlási feltevésekkel járt volna. Az OLS-ről jól tudjuk, hogy mivel ott a megoldást ortogonalitási feltételek adják, annyit mindenképp fel kell tennünk, hogy az a bizonyos eltérésváltozó nulla várható értékű, valamint létezik a szórása. Ezen felül viszont nem kell konkrét eloszlást specifikálnunk neki, a pontbecslés jó tulajdonságait ez gyakorlatilag nem érinti.

A szerzőpáros tehát elutasította a konkrét eloszlási (például normalitási) feltevéseket,<sup>2</sup> és a közönséges legkisebb négyzetek módszerét (leas squares method – LSM) a bemutatottak szellemében terjesztette ki időben változó együtthatóvektorra. A /15/ illeszkedési feltevésben az együtthatók időfüggését bevezetve kapta az ún. regressziós (megfigyelési) priort, míg  $\beta_t$  dinamikájára simító feltevést tett, dinamikus prior néven.<sup>3</sup>

$$y_t - \beta_t'x_t \approx 0 , \quad /16/$$

$$\beta_t - \beta_{t-1} \approx 0 . \quad /17/$$

Vegyük észre, hogy e két egyenlet valójában nem más, mint a Kalman-szűrő állapot-tér modelljének új formalizmussal megadott felírása! A feltevések értelmében a

<sup>2</sup> Bármennyire is elutasították, a szerzőknek az FLS esetében is szükségük volt a kétféle eltérésváltozó nulla várható értékének, valamint véges szórásának feltételezésére, hiszen ugyanolyan négyzetes optimumot alkalmaztak, mint ahogyan az OLS teszi. Ebben az értelemben hívhatnánk az FLS-t „módosított momentumok módszerének” is.

<sup>3</sup> A prior kifejezés az FLS szerzőinek értelmezésében előzetes feltevést jelent, nincs köze a bayesi statisztikában használt prior eloszláshoz.



közönséges négyzetes költségfüggvény is teljesen logikusan módosul, a két priornak megfelelő négyzetes költségösszegeket egy előre megválasztott  $\mu \geq 0$  skalár súlyparaméterrel összesúlyozzuk:

$$C(\beta, \mu) = \sum_{t=1}^T (y_t - \beta'_t x_t)^2 + \mu \sum_{t=1}^{T-1} (\beta_{t+1} - \beta_t)' (\beta_{t+1} - \beta_t) \quad /18/$$

Kalaba és Tesfatsion a kifejezés első tagját mérési költségnek (measurement cost), a másodikat pedig dinamikus költségnek (dynamic cost) keresztelte. A szerzők értelmezésében tehát az FLS-feladat nem más, mint egy többszempontú dinamikus optimalizáció, ahol a felhasználó a súlyparaméter segítségével adja meg preferenciáit a mérési és dinamikus költségfüggvény-komponenssel kapcsolatban. Optimális  $\beta_t$  sorozat esetén csak úgy tudunk bármely költségösszetevőn javítani, ha a másikon közben rontunk – mindez egy Pareto-értelemben vett hatékonysági korlátot (residual efficiency frontier) eredményez a két hibakomponens szerint, melyet akár ábrázolhatunk is a síkban.

Figyeljük meg, hogy a paraméter szélsőséges értékeire két jól ismert speciális esetet kapunk vissza! Ugyanis  $\mu = 0$  esetén teljesen eltűnik a dinamikus költség, azaz a  $\beta_t$  sorozat szabadon változhat időben, miközben a megfigyelések eltérésnégyzeteit minimalizáljuk: ekkor nyilván olyan eredményt kapunk, ahol az illetett  $y_t$  értékek megegyeznek a megfigyelésekkel, viszont az állapotok ennek megfelelően összevissza ugrálnak az időben. Másik szélsőséggént  $\mu \rightarrow \infty$ , ekkor az együttthatóvektor bármilyen időbeli változását végtelenül büntetjük, így az időben állandó lesz; a marginálisan, de megjelenő első tag pedig biztosítja, hogy ez esetben az OLS-megoldáshoz érkezzünk.

Az FLS-feladat megoldását vázolva, kezdetnek azt kell észrevennünk a költségfüggvényben, hogy lehetővé tesz egy  $t=1$ -ből induló dinamikus optimalizálást. Ugyanis, ha  $c(\beta_t, \mu)$ -vel jelöljük az  $n-1$  időpontbeli optimális költségértéket  $\beta_t$ -re kondicionálva, a következő rekurzív összefüggést írhatjuk fel:

$$c(\beta_{t+1}, \mu) = \inf_{\beta_t} \left\{ (y_t - \beta'_t x_t)^2 + \mu (\beta_{t+1} - \beta_t)' (\beta_{t+1} - \beta_t) + c(\beta_t, \mu) \right\}. \quad /19/$$

Továbbá, ez az optimális költség a feltevések szerint négyzetes kell legyen az állapotváltozó aktuális értékében:

$$c(\beta_t, \mu) = \beta'_t S_{t-1} \beta_t - 2\beta'_t s_{t-1} + r_{t-1}. \quad /20/$$

Ezt a formát a /19/ egyenletbe visszahelyettesítve és a deriválást elvégezve lineáris összefüggés adódik az állapotvektor  $t$ . és  $t+1$ . becslései között – akárcsak a

Kalman-szűrő /8/ egyenletében. Az FLS-filter végül a következő három egyenlettel írható le. Elsőként maga az állapotbecslés:

$$\beta_{t|t} = (S_{t-1} + x_t x_t')^{-1} (s_{t-1} + x_t y_t), \quad /21/$$

ezután pedig az  $S_t$  mátrix és  $s_t$  vektor rekurzióinak összefüggése:

$$S_t = \mu (S_{t-1} + \mu I_p + x_t x_t')^{-1} (S_{t-1} + x_t x_t'), \quad /22/$$

$$s_t = \mu (S_{t-1} + \mu I_p + x_t x_t')^{-1} (s_{t-1} + x_t y_t). \quad /23/$$

Ezekben az egyenletekben  $I_p$  a  $p \times p$  egységmátrixot jelöli, valamint természetesen kiindulásul meg kell adnunk az  $S_0$  és  $s_0$  kezdőértékeket. E mátrixoknak sajnos nem olyan könnyű értelmet találni, így a kezdőérték megadása esetlegessé válhat, a szerzők egyenesen kinullázzák őket. A simító eljáráshoz – melyet most nem részletezünk – ugyanezen kezdőértékek kellene,  $S_t$  és  $s_t$  görgetése is előre felé zajlik, csak a  $\beta_{t|t}$  becsléseket származtatjuk visszafelé az időben.

A Kalman-szűrőhöz való elképesztő hasonlóság – azonos állapot-tér modell, négyzetes optimumok – nem csak az Olvasónak lehet feltűnő. A folyóirat hasábjain, ahol korábban az eredeti FLS-cikkek is megjelentek, már 1990-ben vita bontakozott ki a módszer új voltáról. *Tucci* [1990] könnyen bebizonyította, hogy a Kalman-szűrő eloszlási feltevéseit az FLS-ben megtéve a két módszer már teljesen azonos, a még ugyanabban a lapban megjelenő válasz (*Kalaba–Tsfatsion* [1990b]) továbbra is a többszemponúsági és eloszlás-függetlenségi érveket hozta fel. A támadó érve pedig nem volt erőtlen, de utólag már tudhatjuk, a „gond” nem az FLS, hanem a Kalman-szűrő oldalán volt: épp ez utóbbi az, amely tökéletesen működik eloszlási feltevések nélkül is (ahogy korábban már utaltunk rá, de ezt akkoriban még nem feltételezték).

A két módszer közötti megfelelés további részleteihez lássunk egy tételt, amelyet a Kalman-szűrő eloszlási feltevése változatában már 1970-ben (!) bebizonyítottak (*Jazwinski* [1970]), *Montana*, *Triantafyllopoulos* és *Tsagaris* [2009] pedig később belátta, hogy az igazolás eloszlási feltevések nélkül is lehetséges. Az állítás szerint a Kalman-szűrő optimalizáló algoritmus a következő kifejezés  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_T$  szerinti minimalizálásával:

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \beta_t' x_t)^2 + \sum_{t=1}^{T-1} (\beta_{t+1} - \beta_t)' V_{\omega}^{-1} (\beta_{t+1} - \beta_t) \quad /24/$$

Láthatjuk, hogy ez teljesen azonos az FLS /18/ költségfüggvényével, ahol a súlyparaméter és az állapotvektor (egyébként diagonális) kovarianciamátrixa között fennáll a

$$V\omega = \mu^{-1}I_p \quad /25/$$

összefüggés. Ezek szerint a  $\mu$  súlyparaméter segítségével a becsült állapotvektor-sorozat megváltozásának varianciáját direkt módon állítjuk be. Jól látszik tehát, mi-ben különbözik az FLS: míg ugyanezt a Kalman-szűrőnél a teljes – bár diagonális –  $V_\omega$  formájában tesszük meg, itt egyetlen szám áll rendelkezésre a teljes  $p$  tagú variancia leírására.

Összefoglalva tehát, az FLS annyiban korlátozóbb a Kalman-szűrőnél, hogy az összes állapotváltozó változási varianciáját az egyetlen súlyparaméterből eredezteti, így azok mind egyenlők lesznek. Ezen kívül a két módszer megegyezik egymással, egyformán jól működnek konkrét eloszlási feltevések nélkül is, az első és másodrendű momentumokat azonban explicit vagy implicit módon, de meg kell adjuk. Mind ezt az ML-módszerrel annyiban kiegészíthetjük, hogy a paramétereket – így akár  $\mu$ -t is – meg tudjuk becsülni az eloszlásbeli feltevések meglépése után.

A kérdés mindezek után kettős: egyrészt, az FLS használata vajon egyszerűbbé teszi-e a becslést; másrészt pedig, a paraméterkorlátozása elfogadható-e a gyakorlatban? Az első kérdésre részleges választ ismét *Montana, Triantafyllopoulos* és *Tsagaris* [2009] tanulmánya ad: megmutatja ugyanis, hogy eredetileg mindkét szűrő-eljárás használ mátrixinverziót, ami viszont mátrixszorzásokkal ügyesen kiküszöbölhető, ezzel jelentősen gyorsítva az algoritmusokat. A cikk bizonyításaiából némi számolással az is adódik, ahogyan az FLS  $S_0$  és  $s_0$  kezdőértékei származtathatók a Kalman-szűrő megfelelő  $\beta_{1|0}$  és  $P_0$  kiinduló becsléseiből, így egyszerűség és használhatóság tekintetében gyakorlatilag mindegy melyik módszert használjuk. A paraméterrestrikció elfogadhatósága már nehezebb kérdés, erre a szimulációs részben igyekszünk választ adni.

Az FLS szakirodalma a közgazdaságtanban jóval könnyebben áttekinthető híresebb társáénál, hiszen sokszorta kevesebb elemzés készült a használatával.<sup>4</sup> A már többször említett kezdeti bemutatkozó sorozat és vita (*Kalaba–Tsfatsion* [1988], [1989], [1990a], [1990b]; *Tucci* [1990]) idején *Tsfatsion* és *Veitch* [1990] alkalmazásban illusztrálták az FLS képességeit. A szerzők amerikai adatokra vizsgálták a Goldfeld-féle pénzkeresleti modellt, amely a pénzkeresletet a saját késleltetettje és egyéb exogén változók segítségével modellezi. A becsült együttthatókban időbeli vál-

<sup>4</sup> *Leigh Tsfatsion*, az FLS egyik szülőatyja kitűnő irodalom- és programgyűjteményt hozott létre „az FLS honlapján”: <http://www2.econ.iastate.edu/tesfatsi/flshome.htm>

tozást mutattak ki, ráadásul az AR(1) együttható értéke jóval alacsonyabban ingadozott a szokásos OLS-becslésnél, ez a szerzők szerint alátámasztást szolgáltatott a pénzkeresletet korábban övező egységgyök-hipotézis megdöntéséhez.

*Lütkepohl és Herwartz* [1996] nagyon jól használható módon általánosították tovább az FLS-módszert. A minimalizálandó /18/ célfüggvénybe további, szezonális dinamikus összegeket vettek fel, mindemellett ők is észrevették az FLS „implicit” varianciarestrikcióját, így minden dinamikus tagba, a /24/-hez hasonlóan, előre megadott diagonális mátrixokat tettek. A módszerrel német szezonális makroidősorokon érték el eredményeket.

A kétezres években Kalaba és Tesfatsion eredeti munkáit olvasva többen fedezték fel a modellt, valamint összehasonlították a Kalman-szűrővel, annak ellenére, hogy a kapcsolat már korábban is egyértelmű volt. *Kladroba* [2005], valamint *Darvas és Varga* [2010] szimulációs vizsgálatokat folytatott, ahol mindketten belátták, hogy az FLS még a Kalman-szűrőnél alkalmazott ML-becslés ellenére is jobb lehet, ez azonban nem egyértelmű. Jogos a kérdés, hogy a szimulációban miért nem lett teljesen ugyanaz a két módszer eredménye. A válasz a részletekben rejlik: a tényleges azonossághoz el kell hagyni az ML-t, továbbá minden kezdőértéket és paramétert megfelelőre kell állítani. Az FLS-szűrő tulajdonságait *Morana* [2009] is vizsgálja, aki, bár leírja a megfelelést, az eloszlási feltevésekben különbséget lát. A teljes és részletes bizonyítást végül a már sokat hivatkozott *Montana–Triantafyllopoulos–Tsagaris* [2009] cikkben találjuk, ahol a szerzők egy valós idejű pénzügyi alkalmazást is bemutatnak. Egzotikus alkalmazásként még megemlíthetjük *Wood* [2000] munkáját, aki az elnöki népszerűséget modellezi FLS segítségével.

### 3. Markov rezsinváltó modellek

Ebben a részben röviden bemutatjuk az MSW-t, összefüggésben az időben változó együtthatójú regresszióval. Természetesen, akár csak az állapot-tér modell, ez is felírható jóval általánosabban, itt azonban az előző részhez hasonlóan ragaszkodunk a lineáris regressziós kerethez.

Kiindulásul be kell vezetnünk az /2/ lineáris regresszió  $\beta_t$  együtthatóvektorának véges sok lehetséges értékét. Rögzítsünk ilyenből  $N$  darabot, amelyek mindegyike legalább egy skalár elemében különbözik a többitől, ezeket felső indexszel fogjuk jelezni:

$$\beta \in \{\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^N\}. \quad /26/$$

Mivel ezek az együttthatóvektor-értékek kölcsönös megfeleltetésben állnak a modell  $N$  darab állapotával, azokra nem vezetünk be külön jelölést. Azt feltételezzük, hogy az állapotok Markov-láncot követnek, azaz definíció szerint azok előrejelzéséhez a folyamat története nem releváns, kizárólag az utolsó időpontbeli állapot, formálisan

$$P(\beta_t = \beta^j | \beta_{t-1} = \beta^i) = P(\beta_t = \beta^j | \beta_{t-1} = \beta^i, \beta_{t-2} = \beta^k, \dots) = p_{ji}. \quad /27/$$

Mindennek megfelelően az állapotok közötti váltásokat két dimenzióban le tudjuk írni, az ún. átmenet- (vagy tranzíciós) mátrix segítségével. A  $\Pi$  átmenetmátrix  $N \times N$  méretű, és  $i$ . oszlopának  $j$ . eleme megadja, hogy ha az előző időszaki állapotot a  $\beta^i$  együttthatóvektor jellemezte, és mekkora annak a valószínűsége, hogy a következő állapotot éppen  $\beta^j$  fogja:

$$\Pi = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix}, \text{ ahol } p_{ji} = P(\beta_t = \beta^j | \beta_{t-1} = \beta^i). \quad /28/$$

Mivel az állapotok halmaza zárt, azaz bármelyikből csakis az  $N$  állapot valamelyikébe juthatunk (önmagát beleértve), könnyű látni, hogy az átmenetmátrix oszlopaik összege éppen egységnyi.<sup>5</sup>

Gondoljunk az előző részre: jól látható az állapotdinamikát leíró átmenetmátrix analógiája az állapotegyenlettel, hiszen mindkettő a számunkra nem megfigyelt együttthatóvektor időbeli alakulását adja meg. Vajon mivel írjuk le a megfigyelési egyenlet megfelelőjét? Olyan leképezés szükséges számunkra, amely a megfigyeléseket az állapotok függvényében adja meg, hiszen ez lesz számunkra a kulcs az állapotok identifikálásában az adott megfigyelés ismeretében. Az emissziós mátrix való erre a célra: minden állapotban megadja az egyes kimenetek valószínűségét (természetesen diszkrét véges számú kimenet esetében). Modellünkben azonban folytonos kimenetek vannak, ennek megfelelően az  $\eta_t$  emissziós vektort definiáljuk, amely az állapot függvényében megadja a  $t$ . időszaki megfigyelés feltételes sűrűségfüggvényét:

$$\eta_t = \begin{bmatrix} p(y_t | \beta_t = \beta^1) \\ \vdots \\ p(y_t | \beta_t = \beta^N) \end{bmatrix}. \quad /29/$$

<sup>5</sup> A szakirodalom nagyrészt éppen az általunk használt mátrix transzponáltját alkalmazza. Ekkor az összes többi vektor (emissziók, becslések) sorvektorra kell váljon, a  $\Pi$ -vel való szorzások sorrendjét pedig meg kell cserélni, ezen felül minden igaz lesz, amit itt írunk. A két felírás teljesen ekvivalens egymással, mi az oszlopvektorokat ez esetben kényelmesebbnek tartjuk.

Vegyük észre, hogy az emissziós vektor megadásánál válik az eloszlási feltevések bevezetése elkerülhetlenné, hiszen a feltételes sűrűségfüggvényeket meg kell adnunk, még ha paraméterezve is. Így például, ha lineáris regresszióink hibatagját normálisnak vesszük  $\sigma$  szórással, akkor  $y_t$  sűrűsége a  $\beta^i$  együtthatóvektort tartalmazó állapotot feltételezve nem más, mint

$$p(y_t | \beta_t = \beta^i) = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_t - \beta^i x_t}{\sigma}\right), \quad /30/$$

ahol  $\phi(\cdot)$  a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét jelöli. Ezzel a modellünknek megadtuk a „megfigyelési egyenletét” is, készen vagyunk a felépítéssel.

Ami most következik, az a rendszer predikció-korrektio algoritmus, az analógia alapján akár „Markov-szűrőnek” is nevezhetnénk. A kialakuló becsléseink azonban ezúttal nem közvetlenül az együtthatóvektor értékére vonatkoznak – hiszen azokat külön-külön ismerjük –, hanem az egyes együtthatóvektorokkal jellemzett állapotok valószínűség-eloszlására. Ezt az eloszlást  $\xi$ -vel fogjuk jelölni, és az alsó indexében a korábbiakhoz hasonlóan megmutatjuk, hogy melyik időszakban készült, illetve melyik időszakra vonatkozik. Így például a  $\xi_{t|t}$  valószínűségeloszlás-vektor nem más, mint

$$\xi_{t|t} = \begin{bmatrix} P(\beta_t = \beta^1 | y_t) \\ \vdots \\ P(\beta_t = \beta^N | y_t) \end{bmatrix}, \quad /31/$$

természetesen a vektor oszlopösszege egységnyi. Ebből már könnyedén megkaphatjuk magára az együtthatóvektorra vonatkozó  $\beta_{t|t}$  becslésünket, hiszen az egyes valószínűség-értékekkel kell súlyozni magukat a lehetséges együtthatóvektorokat:

$$\beta_{t|t} = E(\beta_t | y_t) = \begin{bmatrix} \beta^1 & \dots & \beta^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(\beta_t = \beta^1 | y_t) \\ \vdots \\ P(\beta_t = \beta^N | y_t) \end{bmatrix} = B \xi_{t|t}, \quad /32/$$

ahol  $B$  a lehetséges  $\beta^i$  oszlopvektorokból képzett  $p \times n$  méretű mátrix.

A rendszer predikciója itt is az állapotdinamikából – azaz átmenetmátrixból – adódik és a Kalman-szűrőhöz hasonlóan igen egyszerű. Ha ugyanis megvan a  $\xi_{t-1|t-1}$  korrigált becslésünk, azaz a  $t-1$ . időszaki állapotok valószínűség-eloszlása (illetve az összes megfigyelés eddig az időpontig), azt úgy tudjuk eggyel előre görgetni, hogy megszorozzuk magával az átmenetmátrixszal:

$$\xi_{t|t-1} = \Pi \xi_{t-1|t-1}. \quad /33/$$

E mátrixegyenlet egy sorának kifejtése igazolja az állítást, amely magukból a definíciókból adja magát. Ezután szokás szerint feltesszük, hogy beérkezik a  $t$ . időszaki megfigyelés, amiből az előbbieket ki tudjuk számolni az  $\eta_t$  emissziós vektort, majd a hiányzó becslésre felírjuk Bayes tételét:

$$P(\beta_t = \beta^i | y_t) = \frac{P(y_t | \beta_t = \beta^i) P(\beta_t = \beta^i)}{P(y_t)}. \quad /34/$$

Lássuk, mit takar az egyenlet jobb oldala! A számláló első tényezője az emissziós vektor  $i$ . eleme, a második tag pedig épp az imént kiszámolt  $\xi_{t|t-1}$  becslés  $i$ . eleme (ne felejtjük el, hogy az egész egyenletet kondicionáljuk a  $t-1$ . időszakra). A nevező nem más, mint az  $y_t$  megfigyelés feltételes likelihood függvénye, amit könnyen megkaphatunk, ha minden  $i$ -re összeadjuk a számlálókat:

$$P(y_t) = \sum_{i=1}^N P(y_t | \beta_t = \beta^i) P(\beta_t = \beta^i) = 1'(\eta_t \odot \xi_{t|t-1}). \quad /35/$$

A második egyenlőség mindezt rövidített formában mutatja, az új operátor ( $\odot$ ) az elemenkénti szorzást jelöli. A /34/ egyenlet tehát éppen a keresett becslést adja, amelyet zárásként átírunk vektoriális formába:

$$\xi_{(t|t)} = \frac{\eta_t \odot \xi_{t|t-1}}{1'(\eta_t \odot \xi_{t|t-1})} = \frac{\eta_t \odot \Pi \xi_{t-1|t-1}}{1'(\eta_t \odot \Pi \xi_{t-1|t-1})}. \quad /36/$$

A képlet eredménye még csak valószínűség-eloszlás, viszont az ismert lehetséges állapotok B mátrixával való /32/ összesúlyozással könnyen megkapjuk az aktuális állapot várható értékét. Ezzel az egyszerű szűrőalgoritmussal tehát a paraméterek ismeretében becslést adhatunk az ismeretlen együttthatóvektor sorozatára, miközben –

mintegy melléktermékként – az egyes megfigyelések likelihoodértékeit is kiszámoljuk. Nem kétséges tehát, a Kalman-szűrőhöz hasonlóan itt is használhatjuk az ML-módszert bármelyik paraméter megbecslésére, gyakorlatilag az egyetlen amit nekünk kell megadni, az maga a modellstruktúra (például, hogy éppen  $N$  darab állapot van vagy az eloszlások milyenségét stb.). Ráadásul, itt is lehetséges simított értékek számítása, melyet az korábbiakhoz hasonlóan nem részletezünk, az megtalálható a már említett *Hamilton* [1994] könyvben.

Így az állapot-tér rendszerekkel szemben a MSW-ben a lineáris regresszióknak együttműködővektora csak véges sok értéket vehet fel, és feltétlenül szükséges eloszlási feltevésekkel élünk; még akkor is, ha nem alkalmazunk ML-eljárást, cserébe a rugalmassága óriási. Ezért általában olyan alkalmazásokban használjuk, ahol relatíve kevés, elmélet szempontjából is jól megkülönböztethető rezsim van, amelyek időben feltehetőleg változtatják egymást. Jó példát szolgáltatnak erre a részvénypiacok, ahol időben váltják egymást az optimizmus és pánik időszakai: előbbiben jellemzően felfele haladnak az árak, a beárazott volatilitás folyamatosan csökken és az egyedi részvények közötti korrelációk alacsonyok, míg az utóbbiban általában áresés, a volatilitás robbanásszerű emelkedése és megugró korrelációk tapasztalhatók.

Bár *Hamilton* [1989] eredeti cikke az üzleti ciklusokról szólt, a modell pénzügyi alkalmazásai gyorsan elterjedtek, klasszikus példát ad erre *Norden* és *Schaller* [1997], de érdemes *Dueker* [1997, 2007] munkásságát is végigkövetni, aki az eszközhozamokat rengeteg Markov-féle specifikációval modellezi. *Hamilton* és *Susmel* [1994] tanulmányának köszönhetően az ARCH-típusú modelleket is elérte a rezsimváltások feltevése, ugyanezzel idehaza *Darvas* [2001] foglalkozott: ő a forintkamatlábba illesztett „switching”, azaz rezsimváltó ARCH- (SWARCH-) modellt.

#### 4. Szimulációs vizsgálat

Ebben a részben egy egyszerű szimulációt mutatunk be, ahol különböző környezetekben láthatjuk az eljárásainkat működés közben, valamint összemérhetjük azok képességeit. Az ML-paraméterbecsléssel kiegészített Kalman- és Markov-modellek mellé bevesszük az FLS-t is, hogy eldöntsük, milyen következményekkel jár a korábban már körüljárt varianciakorlátozás, illetve hogy megvizsgáljuk, mennyivel romlik a becslésünk, ha a  $\mu$  súlyparamétert rosszul állítjuk be. „Kontrolleljárásnak” végül bevesszük az OLS-módszert, és mind a négy esetben a szűrő- és simítóeljárás eredményét is elkészítjük.

Célunk megvizsgálni azt, hogy különböző valós  $\beta_t$  sorozatok esetén hogyan becsli azokat vissza a módszerek szűrő- és simító algoritmusai. Ezért egy olyan reg-



ressziót szimulálunk, ahol a számunkra fontos  $\beta_t$  együttthatóra öt különböző feltevéssel élünk, miközben egy másik,  $\gamma_t$  zavaró együttthatót is beveszünk az egyenletbe, amely azonban minden kísérletnél ugyanaz: egy nulla átlagú autoregresszív folyamat. Összességében tehát a következő modellt szimuláljuk:

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_t x_{1t} + \gamma_t x_{2t} + N(0; 0, 25), & /37/ \\ \gamma_t &= 0,25\gamma_{t-1} + N(0; 0, 05), \\ x_{1t} &\sim N(1; 0, 25) \text{ és } x_{2t} \sim N(1; 0, 25). \end{aligned}$$

Az első egyenlet adja magát a regressziót, a következő a második együtttható időbeli viselkedését írja le, végül a harmadik sorban láthatjuk, hogy az  $x_{1t}$  és  $x_{2t}$  regresszorok azonos normális eloszlásból kerülnek ki. A képletekben jelzett összes véletlen változó független egymástól, az eloszlásoknál pedig a várható értékeket és szórásokat tüntettük fel. Végül a  $\beta_t$ -re vonatkozó öt feltevés a következő:

- konstans együtttható,
- diszkrét törés az együttthatóban,
- lineáris trend az együttthatóban,
- szinuszoid mozgás az együttthatóban,
- az együtttható egységgyök-folyamatot követ.

A visszabecsléseket mindegyik módszernél a helyes specifikációval végezzük (tehát kétváltozós egyenletet teszünk fel). Az OLS-szűrő esetünkben olyan becslés, amely minden időpontban az aktuálisan rendelkezésre álló mintából számolja az együttthatókat a közönséges legkisebb négyzetek módszere segítségével,<sup>6</sup> az OLS-simító pedig ennek megfelelően nem más, mint a teljes mintán számolt konstans együttthatójú becslés. A Kalman-szűrőnél az /5/ egyenlet értelmében az állapotokat egységgyök-folyamatként kezeljük és a szűrőt  $\beta_0 = 0,5$ -ről indítjuk, amely egy „semleges” feltevés, mivel ez az együtttható időbeli átlaga az első négy feltevésnél és ebből a kezdőértékből indul a véletlen bolyongás az ötödik esetben. Az FLS-nél a kezdőértékeket a Kalman-szűrővel azonosnak állítjuk be, a  $\mu$  súlyparaméter tekintetében pedig háromféleképpen járunk el, innét lesz majd a három FLS-becslésünk. Elsőként, az ismert  $\beta_t$  differencia szórásának ismeretében optimális  $\mu$ -t számolunk,<sup>7</sup> majd – megvizsgálandó  $\mu$  félrespecifikálásának hatását – vesszük ennek egytizedét, valamint tízszeresét. Az optimális  $\mu$  valós együttthatókból történő számítása illetéktelen előnyt jelenthet az FLS

<sup>6</sup> A rögzített kezdőpontból induló OLS speciális esete az ún. rekurzív legkisebb négyzetek módszerének (recursive least squares – RLS), ahol megengedett az egyes megfigyelések súlyozása (például exponenciálisan csökkenő súlyozás az időben hátrafelé haladva).

<sup>7</sup> A konstans, illetve lineárisan változó együttthatós esetén ez a módszer végtelen nagy súlyparamétert eredményez, ezért itt korábbi tapasztalatok alapján  $10^3$ -ban határozzuk meg az optimális  $\mu$ -t.

számára, hiszen a többi módszer maga becsli a paramétereket, ez azonban várhatóan jóval kisebb előnyt ad, mint amekkora az együtttható-sorozatok különböző szórásából adódó hátrány. A Markov-modellnél végül két rezsimit feltételezünk, amelyekben mindkét együtttható más-más értéket vehet fel. Bár elég lett volna a számunkra fontos együtttható rezsimenkénti változásának megengedése, a modell szabadságát az „igazságosság” érdekében minél közelebb akartuk hozni a Kalman-szűrőéhez. A kezdő valószínűségeket itt 50-50 százalékra állítjuk a két rezsimben.

Azonos együtttható-sorozat mellett a szimulációt és visszabecslést ezerszer megismételtük a kétszáz megfigyelés hosszúságú adatsorokon, hogy az esetlegességet kiszűrjük; így tulajdonképpen egy Monte-Carlo-szimulációt végeztünk. A becslt sorozatok átlagát, valamint 5. és 95. percentilisét véve konfidenciaintervallumot készítettünk, amelyeket – a valós folyamattal együtt – az 1. a)–5. a) ábrákon mutatunk be. Párhuzamosan, az 1. b)–5. b) ábrákon egy-egy véletlenszerűen kiválasztott esettel illusztráljuk tovább a becslést. Az ábráinkon a 3-3 FLS-szűrt és -simított becslést az olvashatóság megtartása végett kihagyjuk – ezek a becslések jellegükben nem térnek el a Kalman-szűrő becsléseitől, csupán különböző változékonysággal bírnak. Hasonlóan elhagyjuk az OLS-simított becsléseket is – értelemszerűen, hiszen azok időben állandók és leolvashatók az ábrákról, mint az OLS-szűrt sorozatok utolsó értékei.

*A szimulált együttthatók differenciájának szórásai és a visszabecslések átlagos RMSE-értékei\* (százalék)*

Eljárás	Feltevés $\beta_t$ -re				
	Konstans	Diszkrét ugrás	Lineáris trend	Színuszoid	Egységgyök
$\Delta y_t$ szórása	6,0	6,4	6,1	7,2	5,9
$\Delta \beta_t$ szórása	0,0	2,8	0,0	0,7	4,8
FLS-szűrő $\mu_{opt}/10$	7,3	16,3	11,0	12,1	20,8
FLS-simító $\mu_{opt}/10$	5,8	12,0	8,2	9,0	15,4
FLS-szűrő $\mu_{opt}$	2,9	11,7	13,6	15,4	13,8
FLS-simító $\mu_{opt}$	2,7	9,2	10,3	13,2	11,1
FLS-szűrő $\mu_{opt} \times 10$	1,2	13,3	18,1	19,6	14,7
FLS-simító $\mu_{opt} \times 10$	1,1	11,2	16,0	18,4	13,7
Kalman-szűrő	3,6	9,9	9,0	9,5	12,5
Kalman-simító	3,1	8,0	7,3	6,7	10,3
Markov-szűrő	8,0	8,3	13,0	12,3	14,0
Markov-simító	8,4	7,1	13,1	12,1	13,5
OLS-szűrő	43,0	64,4	102,3	53,4	42,5
OLS-simító	4,3	21,1	21,3	22,2	18,5

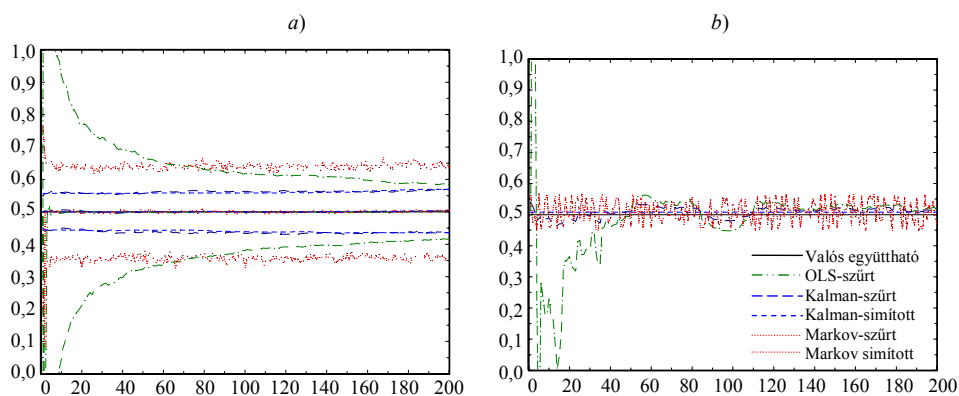
\* A  $\beta_t$  együttthatóra vonatkozó öt feltevés, négyféle becslőeljárás szűrt és simított változata.

Azért, hogy számszerűen is áttekintést nyerjünk az egyes módszerek előnyeiről és hátrányairól, a táblázatban a valós és becsült sorozatok közötti átlagos négyzetes hiba (root mean squared error – RMSE) értékeit is közöljük, valamint feltüntetjük a szimulált együtttható-sorozatok differenciáinak szórásait is, ami az FLS szempontjából fontos.

A következőkben bemutatjuk az öt feltevést az együttthatóvektor alakulására vonatkozóan, és külön-külön megvizsgáljuk a kapott eredményeket.

– *Konstans együtttható.* A  $\beta_t$  értékét végig 0,5-ön tartjuk, ez egyfajta kontroll kísérlet. Az 1. a) ábrán látjuk, hogy a várható érték tekintetében minden eljárás sikerrel vette ezt az alapadályt, a bizonytalanság szempontjából viszont egyrészt a „hazai pályán játszó” OLS óriási intervallumról csökken le, másrészt pedig, a két Markov-algoritmus jóval nagyobb – bár végig konstans – bizonytalanságot produkál a Kalman-algoritmusoknál. Vajon miért? Az első kérdés megválaszolásánál azt kell észrevennünk, hogy induláskor az OLS-szűrő semmiféle segítséget nem kap az ismeretlen együtttható értékről, ellentétben a többi módszerrel. Ezért kezdetben a kis mintaelemszám miatt nagy a szórása, ami aztán exponenciálisan csökken – kellően sok megfigyelés esetén viszont a többi módszer szórása alá is kerülhet.

1. ábra. OLS-, Kalman- és Markov-becslések, időben konstans együtttható,  $\beta_t = 0,5$



*Megjegyzés.* A bal oldalon ezer realizáció átlagos becslése látható 5 és 95 százalékos kvantilisekkel, a jobb oldalon egyetlen realizáció becslései.

A második kérdésre a tulajdonképpen technikai választ az 1. b) ábrán találjuk, ahol egyetlen kiragadott eset látható a szimulációkból: a Markov-modell itt valójában egy félrespecifikációval szembesül, hi-

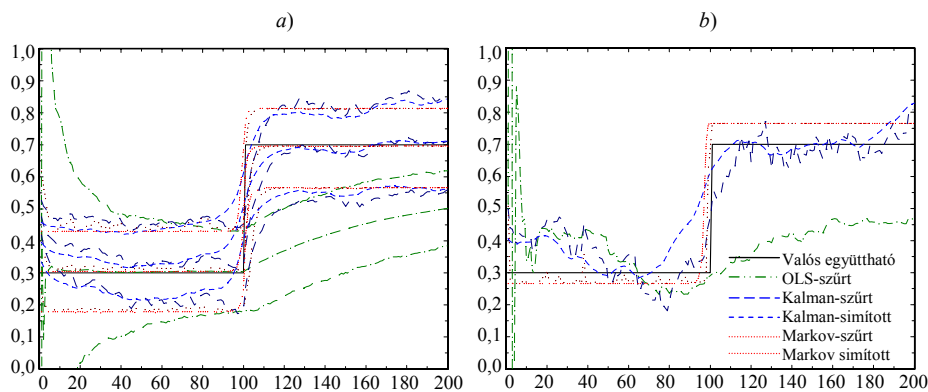
szen csak egyetlen  $\beta$  érték van a kettő helyett. Az ML-optimumban viszont aligha garantálható, hogy a két becült  $\beta$  egybeessen, valamekkora különbség mindig lesz közöttük a numerikus optimalizálás nem tökéletes volta és az aktuális minta egyenetlenségei miatt. A szűrő- és simítóalgoritmus viszont ettől „ugrálni” fog, mert az aktuális zajok miatt hol az egyik, hol a másik becült érték felé hajlik.

A Kalman-szűrő és -simító között is látunk különbséget, bár csak az 1. b) ábrán. Ez nem az aktuális eset specifikuma, hanem általános: a szűrő becslése mindig változékonyabb, hiszen csak a saját múltjából dolgozik, a simító – ahogy a neve is mutatja – a teljes környezetet figyelembe veszi (előre és hátrafelé is), így ez esetben is helyesen eltávolítja az együttható konstans voltát.

A szimuláció tanulsága tehát, hogy a Markov-modell becslésének bizonytalansága megnőhet, amikor hamisan túl sokféle állapotot feltételezünk és a becült rezsimek viszont túlzottan egybeesnek; ettől eltekintve az eljárások jól képesek követni a konstans értéket, ahogyan azt vártuk.

– *Diszkrét törés az együtthatóban.* Az értéke a minta felénél 0,3-ról 0,7-re vált. Ez az időbeli viselkedés a leginkább összeegyeztethető a Markov-modell feltevéseivel, hiszen a két értéket két különböző rezsimnek foghatjuk fel.

2. ábra. OLS-, Kalman- és Markov-becslések, diszkrét törés az együtthatóban,  $\beta_t = 0,3(t \leq 100) + 0,7(t > 100)$



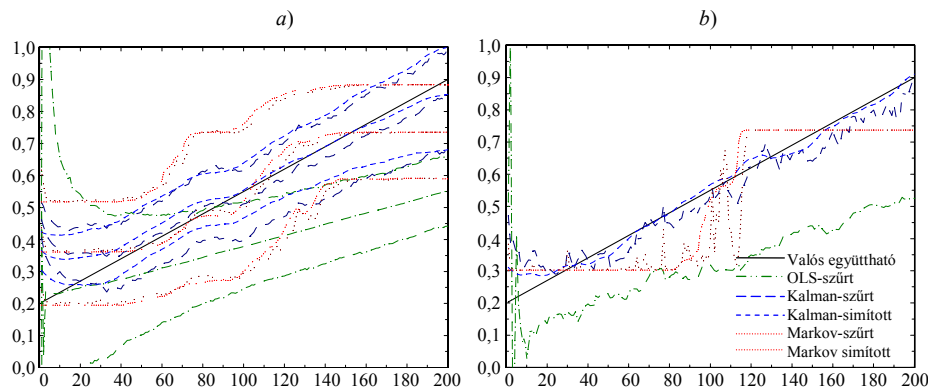
*Megjegyzés.* A bal oldalon ezer realizáció átlagos becslése látható 5 és 95 százalékos kvantilisekkel, a jobb oldalon egyetlen realizáció becslései.

A 2. ábrán mindez gyönyörűen visszaköszön, a Kalman-algoritmusok láthatóan rosszabbul alkalmazkodnak az ugráshoz, bár ezen kívül a két modell standard hibája közel azonos. A szűrők – érthetően – csak az ugrás után kezdenek alkalmazkodni, a simítók pedig átsimítják

az együtttható változását. Összességében, diszkrét váltásnál a Markov-modell gyorsabban reagál, de a Kalman-szűrő is használhatóan működik. Az OLS az előző esethez hasonlóan nagy bizonytalansággal kezd, jól követi a konstans 0,3-at, majd a váltás után fokozatosan – nagyon lassan alkalmazkodik. A simított OLS-becslés pedig jól láthatóan a két együtttható-érték átlagát adja, ami nem meglepő, hiszen a törés épp a felező időpontban következett be.

– *Lineáris trend az együttthatóban.* Értéke a mintában folyamatosan 0,2-ről 0,9-re változik. A 3. ábra tanúsága szerint az OLS képtelen követni a változást, hiszen kiátlagolja a múltbéli  $\beta_t$ -ket. A Kalman-algoritmusok ellenben alacsony bizonytalansággal pontosan képesek jó becslést adni a lineáris változásra. Figyeljük meg a szűrő alkalmazkodását a kezdő 0,5-ös értékről. A simító már jobban közelíti ezen a kezdeti szakaszon is az együttthatót, de az induló becsléshez való „húzás” itt is látszik.

3. ábra. OLS-, Kalman- és Markov-becslések,  
lineáris trend az együttthatóban,  $\beta_t = 0,2 + 0,7(t/200)$



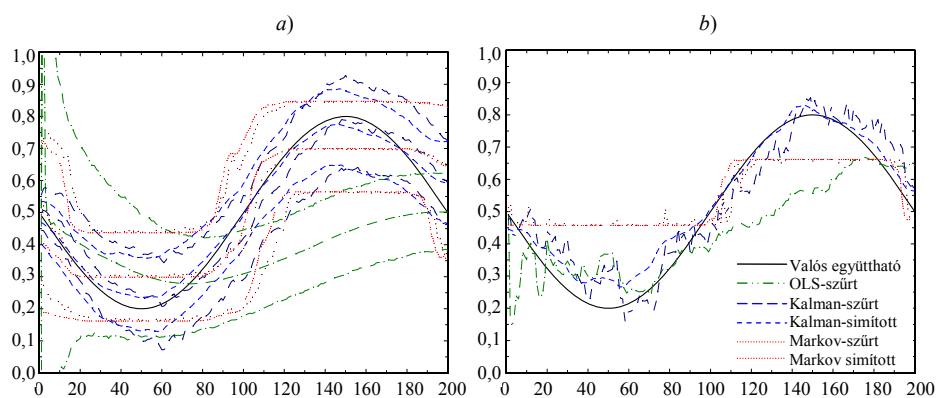
*Megjegyzés.* A bal oldalon ezer realizáció átlagos becslése látható 5 és 95 százalékos kvantilisekkel, a jobb oldalon egyetlen realizáció becslései.

A Markov-modellek itt már nehezebb helyzetben vannak, hiszen az ML-módszer két rögzített  $\beta$  állapotot tud csak kijelölni. Ezek az állapotok logikusan jelölődnek ki a növekvő lineáris szakasz első és harmadik negyedéhez, a szűrő és simító pedig – nagyjából középen – átvált a felső rezsimre, ezt láthatjuk a 3. b) ábrán. A másik panel szerint ez az átváltás eloszlik a minta közepén, így az egyedi eset hibája ellenére átlagosan jó becslést kapunk: egyrészt nagy standard hibával, másrészt pedig egyetlen becsléssel biztosan hibázni fogunk.

Ezt az esetet összefoglalva: a Markov-modell „lépcsősen” becsül különböző rezsimeket a folytonos váltás helyett, és a valószínűségek többnyire úgy alakulnak, hogy a súlyozott várható érték nem folytonosan, hanem hirtelen vált át egyik rezsimből a másikba. Lineáris és ehhez hasonló folytonos változás esetén tehát érdemes a nagyon jó követési tulajdonságokkal rendelkező Kalman-szűrőt választani.

– *Színuszoid mozgás az együtthatóban.* A  $\beta_t$  a mintában egy teljes periódusnyi szinusz hullámot végez, melynek középértéke és amplitúdója rendre 0,5 és 0,3. Ez az eset jellegében nagyon közel áll az előzőhöz, hiszen itt sem véletlenek az együttható változásai. Ennek megfelelően a megfigyelésünk is hasonló: a Markov-modell legfeljebb átlagosan ad jó becslést, az OLS kiátlagol, a Kalman-szűrő viszont helyesen követi az együttható mozgását.

4. ábra. OLS-, Kalman- és Markov-becslések, szinuszoid mozgás az együtthatóban,  $\beta_t = 0,5 - 0,3 \sin(2\pi t/200)$

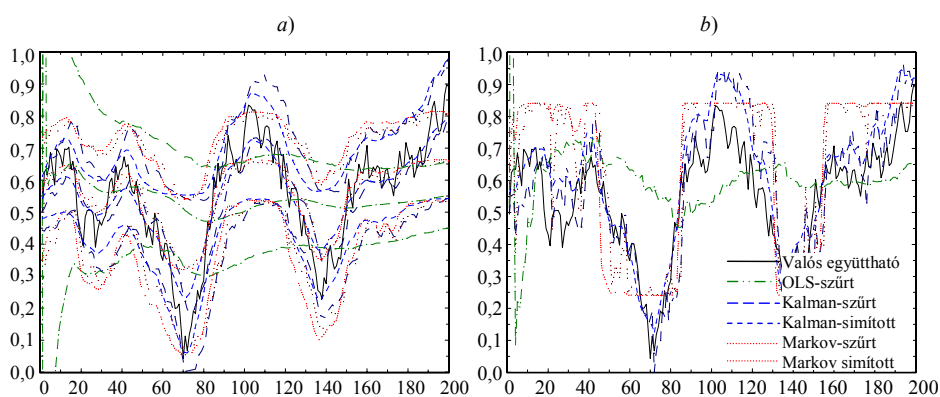


*Megjegyzés.* A bal oldalon ezer realizáció átlagos becslése látható 5 és 95 százalékos kvantilisekkel, a jobb oldalon egyetlen realizáció becslései.

Figyeljük meg a 4. ábrán (és akár az előző, lineáris esetről is), hogy a Kalman-szűrő várhatóan némi késéssel követi csak a mozgást; ez egy általánosan megfigyelhető jelenség, amelynek az oka az, hogy az algoritmus egyre csökkenő súllyal, de figyelembe veszi az elmúlt megfigyeléseket. A simító természetesen már nem esik ebbe a hibába.

– *Az együttható egységgyök folyamatot követ,* melynek kiinduló értéke 0,5. Ez az eset láthatóan a Kalman-szűrő terepe, hiszen tökéletesen megegyezik annak a feltevésével, míg a másik oldalon előre látható, hogy a Markov-modell vagy az OLS becslésének jósága itt esetleges, nagyban függhet a folyamat mintabeli alakulásától.

5. ábra. OLS-, Kalman- és Markov-becslések,  
egységgyök az együttthatóban,  $\beta_t = \beta_{t-1} + 0,05\varepsilon_t$ , ahol  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$



Megjegyzés. A bal oldalon ezer realizáció átlagos becslése látható 5 és 95 százalékos kvantilisekkel, a jobb oldalon egyetlen realizáció becslései.

Az 5. ábrán levő realizációból az előző két esethez hasonlóra következtethetünk: bár a Markov-modell szabadsága jóval kisebb, itt is megfelelően választja ki a rezsimeket és vált közöttük.

A szimuláció összefoglalásául tekintsünk az átlagos négyzetes hibákat összegző táblázatra! Elsőként szögezzük le, hogy az OLS-szűrő produkálta a legrosszabb eredményt, ami részben a tényleges alkalmatlanságának, részben pedig a nagy kezdeti bizonytalanságának köszönhető. Az OLS-simító – azaz teljes mintás konstans együttthatós becslés – hibaszintjei viszont már nem kirívóan rosszak: ezek egyfajta etalont jelenthetnek, hiszen ezt tudjuk elérni az időben állandó, az együtttható-sorozatot valójában kiátlagoló becsléssel.

A Kalman- és Markov-modellek esetében megállapíthatjuk, hogy azokban az esetekben, ahol a feltevések megegyeznek az adott modell feltevéseivel, 1. a simítóeljárás jobb eredményt produkál a szűrőnél, 2. az adott modell jobban működik a másikonál. Az előzőekben részletesen leírtuk, hogy melyik eset melyik modell feltételrendszerének kedvez jobban, és mindezek a tapasztalt hibákban is visszaköszönnek, ami nem meglepő. Ahogyan az sem meglepő, hogy félrespecifikálás hiányában az a jobb eljárás, ami az adott pillanatban „jövőbe lát”, tehát ismeri az összes adatpontot. Ne feledkezzünk el viszont arról sem, hogy valós idejű alkalmazásban csak a szűrt eredmények állnak rendelkezésre!

Végezetül vizsgáljuk meg az FLS-becsléseket! Először is, az optimálisnak számított  $\mu$  paraméter is láthatóan rosszabb eredményeket ad a Kalman-szűrőnél, amit a zavaró  $y_t$  folyamat különböző szórása okoz, ezt jól láthatjuk az utolsó, egységgyök-folyamatos esetben, ahol mind a szórásbeli, mind az RMSE-beli különbségek kicsik. Az eltérő szórású együtttható-sorozatok tehát némileg megzavarják az FLS-módszert.

A súlyparaméter beállítására való robusztusságot vizsgálva pedig azt kapjuk, hogy az eredmény  $\mu$  megváltoztatásával bár romlik, még mindig összeegyeztethető az OLS-simító etalonjával.

## 5. Összefoglalás

Tanulmányunkban az időben változó együtthatójú lineáris regresszióra felírt Kalman-szűrőt, a rugalmas legkisebb négyzetek módszerét és a Markov rezsimváltós modellt hoztuk közös keretbe és hasonlítottuk őket össze elméletben és gyakorlatban. A Kalman-szűrő olyan algoritmikus frissítő eljárás az állapot-tér modell állapotváltozójának becslésére, amely négyzetes értelemben optimális mind a megfigyelések, mind az állapotvektor valódi értékektől vett eltérése szempontjából. A rugalmas legkisebb négyzetek módszere ugyanebben az állapot-tér keretben, ugyanúgy az állapotváltozó becslésére szolgál, a célfüggvénye azonban a közönséges legkisebb négyzetek módszerének egy logikus továbbgondolása: a „szokásos” eltérésnégyzetek mellett egy dinamikus tagot is tartalmaz, amely az állapotvektor időbeli változásának varianciáját kontrollálja. A célfüggvény az OLS-hez hasonlóan konkrét eloszlási feltevések nélkül optimalizálható, és az is igazolható, hogy néhány korlátozás figyelembevételével a Kalman-szűrővel azonos eredményre jut.

A Markov rezsimváltó modell alapjaiban hasonló az állapot-térhez, a látens állapotváltozó azonban itt diszkrét értékeket vehet fel, amelyeknek az egymásba való átmenete Markov-láncot alkot. A megfigyelések feltételes sűrűségfüggvényének ismeretében adhatunk szűrőeljárást az állapotvektor becslésére, itt tehát nem kerülhetjük el az eloszlási feltevéseket a megfigyelt változókra vonatkozóan. Mind a Kalman-, mind a Markov-szűrőt alkalmazhatjuk együtt a maximum likelihood módszerrel, amely a modellek gyakorlatilag bármely paraméterét tudja becsülni.

A tanulmány gyakorlati része regressziókat szimulált, majd becsült vissza a rögzített mintakezdőpontú OLS-, FLS-, Markov-modell és a Kalman-szűrő segítségével. Az eredmények szerint egyrészt az időben változó együtthatóra vonatkozó feltevéstől függően az a modell teljesített jobban, amelynek a feltételei közelebb állnak az együtthatóéhoz, másrészt a simítóeljárások jobb eredményt érnek el a szűrőeljárásoknál. Ezek alapján, ha a regresszió együtthatójában hirtelen ugrásokat feltételezünk, érdemesebb a Markov-modellt használnunk, míg ha folytonos változást, akkor inkább a Kalman-szűrőt vagy a rugalmas legkisebb négyzetek módszerét – bár bemutatottuk, hogy a módszer teljesítményét rontja a restrikciónak nem megfelelő együtthatók jelenléte. Emellett, amíg nem valós idejű, „on-line” típusú becsléssel van dolgunk, a szűrőeljárások helyett érdemes simítókat alkalmaznunk.



## Irodalom

- BEECHEY, M. – ÖSTERHOLM, P. [2007]: *The Rise and Fall of U.S. Inflation Persistence*. Finance and Economics Discussion Series. No. 26. Federal Reserve Board. Washington, D.C.
- CIMADOMO, J. – GARNIER, J. – SCHALCK, C. [2007]: *Time Varying Fiscal Policy Rules for Five OECD Countries*. 62nd ESEM Conference. August 27–31. Budapest.
- DARVAS ZS. [2001]: Árfolyamrendszer-hitelesség és kamatláb-változékonyság. *Statisztikai Szemle* 79. évf. 6. sz. 490–506. old.
- DARVAS, ZS. [2009]: *Monetary Transmission in three Central European Economies: Evidence from Time-Varying Coefficient Vector Autoregressions*. Tanszéki Tanulmány. 3. sz. Budapesti Corvinus Egyetem Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszék. Budapest.
- DARVAS ZS. – SIMON A. [2002]: A financiálisan fenntartható kibocsátás becslése a gazdaság nyitottságának felhasználásával. *Közgazdasági Szemle*. XLIX. évf. 5. sz. 361–376. old.
- DARVAS, ZS – VARGA, B. [2010]: *Time-varying Coefficient Methods to Measure Inflation Persistence*. Paper presented at the ECOMOD 2010 Conference. 7<sup>th</sup>–10<sup>th</sup> July. Istanbul.
- DOSSCHE, M. – EVERAERT, G. [2005]: *Measuring Inflation Persistence – A Structural Time Series Approach*. ECB Working Paper. No. 495. European Central Bank. Frankfurt am Main.
- DRIVER, R. – GREENSLADE, J. V. – PIERSE, R. [2006]: Whatever Happened to Goldilocks? The Role of Expectations in Estimates of the NAIRU in the US and the UK. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. Volt. 68. No. 1. pp. 45–79.
- DUEKER, M. J. [1997]: Markov Switching in GARCH Processes and Mean Reverting Stock Market Volatility. *Journal of Business and Economic Statistics*. Vol. 15. No. 1. pp. 26–34.
- DUEKER, M. J. – NEELY, CH. [2007]: Can Markov Switching Models Predict Excess Foreign Exchange Returns? *Journal of Banking and Finance*. Vol. 31. No. 2. pp. 279–296.
- EUBANK, R. L. [2006]: *A Kalman Filter Primer*. Chapman and Hall. New York.
- GOLDFELD, S. M. – QUANDT, R. E. [1973]: A Markov Model for Switching Regressions. *Journal of Econometrics*. No. 1. pp. 3–16.
- GRANGER, C. W. J. [2008]: Non-Linear Models: Where do We Go Next – Time Varying Parameter Models? *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*. Vol. 12. No. 3. Article 1.
- GUO, L. [1990]: Estimating Time Varying Linear Parameters by the Kalman Filter Based Algorithm: Stability and Convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 35. No. 2. pp. 141–147.
- HAMILTON, J. D. [1989]: A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica*. Vol. 57. No. 2. pp. 357–384.
- HAMILTON, J. D. [1994]: *Time Series Analysis*. Princeton University Press. Princeton.
- HAMILTON, J. D. – SUSMEL, R. [1994]: Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime. *Journal of Econometrics*. Vol. 64. No. 1–2. pp. 307–333.
- HARVEY, A. C. [1989]: *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press. Cambridge.
- HORVÁTH, R. [2007]: *Estimating Time-Varying Policy Neutral Rate in Real Time*. IES Working Paper. No. 1. Charles University of Prague. Prague.
- JAZWINSKI, A. H. [1970]: *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press. New York.

- KALABA, R. – TESHATSION, L. [1988]: The Flexible Least Squares Approach to Time-varying Linear Regression. *Journal of Economic Dynamics and Control*. No. 12. pp. 43–48.
- KALABA, R. – TESHATSION, L. [1989]: Time-Varying Linear Regression Via Flexible Least Squares. *Computers and Mathematics with Applications*. Vol. 17. No. 8–9. pp. 1215–1245.
- KALABA, R. – TESHATSION, L. [1990a]: Flexible Least Squares for Approximately Linear Systems. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*. Vol. 20. No. 5. pp. 978–989.
- KALABA, R. – TESHATSION, L. [1990b]: A Further Note on Flexible Least Squares and Kalman Filtering. *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 14. No. 1. pp. 183–185.
- KALABA, R. – TESHATSION, L. [1996]: A Multicriteria Approach to Model Specification and Estimation. *Computational Statistics and Data Analysis*. Vol. 21. No. 2. pp. 193–214.
- KALMAN, R. E. [1960]: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering*. Vol. 82. Ser. D. pp. 35–45.
- KLADROBA, A. [2005]: *Flexible Least Squares Estimation of State Space Models: An Alternative to Kalman-Filtering?* Working Paper. No. 149. Universität Duisburg-Essen. Duisburg, Essen.
- LÜTKEPOHL, H. – HERWARTZ, H. [1996]: Specification of Varying Coefficient Time Series Models via Generalized Flexible Least Squares. *Journal of Econometrics*. Vol. 70. No. 1. pp. 261–290.
- MONTANA, G. – TRIANTAFYLLOPOULOS, K. – TSAGARIS, T. [2009]: Flexible Least Squares for Temporal Data Mining and Statistical Arbitrage. *Expert Systems with Applications*. Vol. 36. pp. 2819–2830.
- MORANA, C. [2009]: An Omnibus Noise Filter. *Computational Statistics*. Vol. 24. No. 3. pp. 459–479.
- NORDEN, S. – SCHALLER, H. [1997]: Regime Switching in Stock Market Returns. *Applied Financial Economics*. Vol. 7. No. 2. pp. 177–191.
- TESHATSION, L. – VEITCH, J. [1990]: U.S. Money Demand Instability: A Flexible Least Squares Approach. *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 14. No. 1. pp. 151–173.
- TUCCI, M. P. [1990]: A Note on Flexible Least Squares. *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 14. No. 1. pp. 175–182.
- WOOD, B. D. [2000]: Weak Theories and Parameter Instability: Using Flexible Least Squares to Take Time Varying Relationships Seriously. *American Journal of Political Science*. Vol. 44. No. 3. pp. 603–618.

## Summary

The study is a comprehensive introduction to the estimation methods of time-varying coefficient linear models. At first, the state space representation and the popular Kalman filter are reviewed, along with the very similar (and much less known) flexible least squares. The recently uncovered subtle differences between the two models are discussed. Then the author shows the alternative Markov switching method which can also be used for estimation of TVC models. The qualities of the two model families are illustrated with simulation experiments.