

Egységgyöktesztek alkalmazása szezonalitást is tartalmazó idősorok esetében energiatőzsde-adatok példáján

Mák Fruzsina,
a Budapesti Corvinus Egyetem
tanársegédje
E-mail: mak.fruzsina@uni-
corvinus.hu

A szezonális megfelelő kezelésének kérdése hosszú és rövid távú idősorok esetén egyaránt érdekes feladat. A döntés a determinisztikus vagy sztochasztikus modellezést, illetve annak következményeit illetően hasonló relevanciájúak, mint a determinisztikus és sztochasztikus trend közötti különbségtétel. A szerző tanulmányában ismerteti, hogy milyen módon lehetséges a sztochasztikus trend és szezonális tesztelése abban az esetben, amikor azok egymástól nem függetlenek. Az eredményeket európai energiatőzsdék (villamos energia és földgáz) day-ahead (spot) piaci kereskedési adatain mutatja be.

TÁRGYSZÓ:
Egységgyök.
Szezonális.
Energiatőzsde.

Tanulmányunkban a periodikus autoregresszív modellstruktúra felhasználásával mutatjuk be, hogy hogyan tesztelhető a stacionaritás megléte vagy hiánya akkor, amikor a sztochasztikus trend és szezonaritás egymástól nem függetlenek. Az ismert szezonális egységgyöktesztek feltételezik a nemszezonális és szezonális komponensek függetlenségét, formálisan ez az ún. szezonális differencia szűrő lag-polinom felbontásában is látható.

A bemutatott módszertan újdonsága így nemcsak – és nem elsősorban – a periodikus (azaz szezonálisan változó) autoregresszív struktúra definiálásán, hanem a trend és szezonaritás egymástól való függetlenségének feloldásán van. Az eltérő kiinduló feltételrendszerből adódóan az eredmények nem feltétlenül összehasonlíthatók, ráadásul a trend és szezonaritás függetlensége nehezen ellenőrizhető, hiszen mindkettő nem megfigyelhető komponens jelenti, amiket a megfelelő modell felírásával csak becsülni tudunk. A függetlenség feltételezésének feloldását, azaz azt, hogy a szezonális komponens értéke függ a trendtől (vagy fordítva), a gyakorlatban a komponensek multiplikatív összekapcsolódásaként szokás azonosítani. Így az itt ismertetett technika lényegében multiplikatív modellkörnyezetben végrehajtott egységgyöktesztelésként is felfogható¹.

Bemutatjuk ezentúl a periodikus (azaz a szezonálisan változó) differenciaszűrőt, amelyet összevetettünk más hagyományos differenciaszűrők alkalmazásával. A periodikus differenciaszűrő csak látszólag nagyon hasonló a szezonális differenciaszűrőhöz, hiszen feloldja egyrészt a függetlenség, másrészt valamennyi szezonális egységgyök meglétének feltételezését. A függetlenség feltételének feloldását tehát a trend növekedésével párhuzamosan növekvő szezonális kilengések indokolhatják, amely tulajdonság empirikusan jó alapot szolgáltat a tanulmányban bemutatott modellek illesztésére. Másik oldalról tekintve pedig meg kell jegyeznünk, hogy a szezonális egységgyök meglétének vagy hiányának ellenőrzésére szolgáló tesztek ereje jellemzően kicsi, így előfordulhat, hogy nem a megfelelő szűrő alkalmazása mellett döntünk, és olyan egységgyököt is szűrünk, amely valójában nem létezik (azaz túldifferenciálhatjuk az idősort).

Az eredményeink azt mutatják, hogy a periodikus differenciaszűrő alkalmazásával jellemzően simább (kevesebb zajt, illetve kiugró értéket tartalmazó), „egyszerűbb” idősort kaphatunk a hagyományos differenciaszűrők alkalmazásával szemben, amennyiben a multiplikatív összekapcsolódás feltételezése indokolt. Egyszerűbb idősor alatt

¹ Vannak egyébként olyan technikák, amelyek az additív és multiplikatív modellkapcsolódás közötti választást segítik, ennek tárgyalása azonban meghaladja tanulmányunk kereteit (bővebben lásd *Sugár* [1999a], [1999b] munkáit).

értendő, hogy a szűrt idősorra általában jellemzően alacsonyabb késleltetési rendű modell illeszthető, mint egy hagyományos szűrő következményeként kellene. A következtetésünk azonban nem elsősorban az „egyszerűbb” differenciált idősoron van, hanem a helyes kiinduló feltételezések megválasztásán. Az eredmények validálására előrejelzéseket is készítettünk a különböző szűrők alkalmazását követően.

Fontos megjegyeznünk ugyanakkor, hogy az itt ismertetett periodikus differenciaszűrő nem olyan általánosan alkalmazható módszer, mint a hagyományosak, ugyanis a modelleredményekből, becsült paraméterekből származtatható, szemben a hagyományos differenciaszűrőkkel, amik nem használnak fel ilyen becsült információkat, csupán időbeli változásokat képeznek. A differenciált idősor tartalma is eltér a hagyományos dekompozíciós elveknél megszokottól, hiszen a periodikus differenciaszűrő a trendet és a szezonális hatását egyszerre – egy lépésben – szűri.

1. Trend és szezonális idősoros modellezése

Mivel a trend és a szezonális jelenléte, illetve egymáshoz való viszonya kiemelt hangsúlyt kap, ezért ebben a fejezetben röviden megemlíjtük azokat az általánosan ismert megközelítéseket, amelyekhez a tanulmányunk kapcsolódik.

1.1. Determinisztikus és sztochasztikus szemlélet

Trend tekintetében közismert, hogy a stacionaritás hiányának két alapvető oka lehet: az idősor determinisztikus vagy sztochasztikus trendet tartalmaz, azaz egységgyök van benne, ritkább esetben mindkettőt. Előbbi determinisztikus trend illesztésével szűrhető, utóbbi egyszerű differenciaképzéssel ($y_t - y_{t-1}$).

Párhuzamot vonva a szezonálisra is, a szezonális is modellezhető determinisztikus vagy sztochasztikus módon. A determinisztikus szezonális modellezés eszközei lehetnek a szezonoknak megfelelő dummy- vagy kontrasztváltozók, de megfelelően skálázott (amplitúdó és fázis) szinusz és koszinusz függvények illesztésével is becsülhető a szezonális hatása. Ebben az esetben az illesztett szezonális tartalmú változók szűrik a szezonális hatást.

A sztochasztikus szezonális modellezést érdemes az – egyébként kézenfekvő – szezonális differenciaképzés felől megközelíteni. A szezonális differenciaképzés (általánosságban $(y_t - y_{t-s})$, azaz negyedéves $(y_t - y_{t-4})$ és havi idősorok esetén $(y_t - y_{t-12})$), a szezonális periodikusságának megfelelő számú, egy nemszezonális és több szezonális (azaz negyedéves idősorok esetén három, havi idősoroknál tizenegy) egységgyököt feltételez. A szezonális differenciaképzés feltételezi még a megfelelő nemszezonális és szezonális komponensek egymástól való függetlenségét. Ezen

tulajdonságok a lag-polinomok felbontásából egyértelműen láthatók (*Hylleberg et al.* [1990], *Hamilton* [1994]).

Mint ismert, amennyiben az egységgyökök közül néhány nem létezik, felléphet a túldifferenciálás problémája. A függetlenség megléte vagy hiánya ugyan nehezen ellenőrizhető, de a tanulmányban olyan módszertant mutatunk be, amely a függetlenség feltételének a feloldásával teszi lehetővé a sztochasztikus trend és szezonális együttes ellenőrzését, beleértve a döntés következményét is (azaz a periodikus differenciaképzés alkalmazását).

1.2. Hagyományos differenciaoperátorok alkalmazása

Az alfejezetben áttekintjük a hagyományos differenciaszűrők alkalmazását, amelyeket a Box–Jenkins-modellezés keretében gyakran alkalmaznak. Mint tudjuk, a Box–Jenkins-modellezés egyik sarokpontját az ún. stacionaritási transzformációk képezik, melyek közül az időbeli differenciaképzés $(y_t - y_{t-1})$, illetve szezonális differenciaképzés $(y_t - y_{t-s})$, a gyakorlatban is sokszor alkalmazott és többnyire jól is működik.² Az említett differenciaszűrők alkalmazása szorosan összefügg az egységgyök tesztelésével, így a továbbiakban a két témát párhuzamosan tárgyaljuk.

Az (ún. nemszezonális) egységgyök lényege, hogy az idősort érő sokk beépülnek az idősorba, így azok hatása nem múlik el. Legegyszerűbb esetben tegyük fel, hogy a folyamatunk a következő véletlen bolyongás (random walk) folyamat: $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$, ahol ε_t a fehér zaj. Az $(y_t - y_{t-1})$ időrendi differenciát képezve, vagy másképpen az $(1 - L)$ szűrőt alkalmazva az idősorra, már stacioner (ez esetben az ε_t fehér zaj) folyamatot kapunk (lásd például *Hamilton* [1994]).

Sokszor alkalmazott a szezonálisnak megfelelő $(y_t - y_{t-s})$ ún. szezonális differenciák képzése, vagy másképpen az $(1 - L^s)$ szűrők alkalmazása. Látni kell azonban, hogy az említett szűrők alkalmazásának két rendkívül markáns és komoly feltételezése van: egyrészt valamennyi (egy darab nemszezonális és $s - 1$ darab szezonális) egységgyök megléte, másrészt a nemszezonális és a megfelelő szezonális komponensek függetlensége.

Az ún. HEGY-teszt (*Hylleberg et al.* [1990])³ alkalmas valamennyi lehetséges (nemszezonális és szezonális) egységgyök tesztelésére. A tesztnek van havi adatokra

² Az L^p ún. lag-operátor az idősor p -ed rendű késleltetését jelenti. Amennyiben például $p = 1$, $Ly_t = y_{t-1}$, ennek alapján $(1 - L)y_t = y_t - y_{t-1}$, azaz utóbbi az idősor egyszerű differenciája.

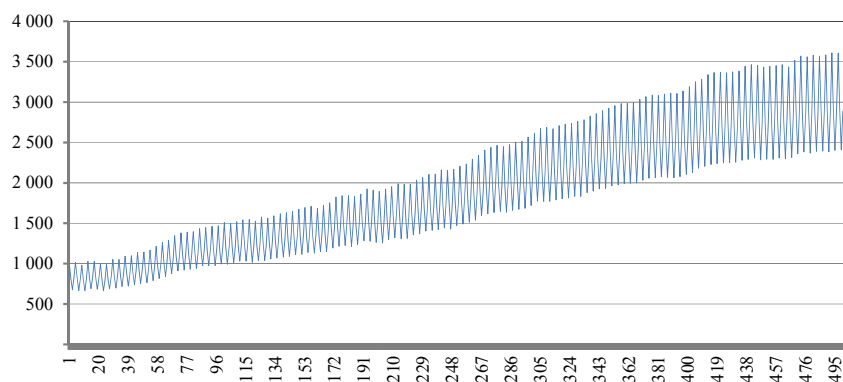
³ Kiindulva a szezonális $(1 - L^s)$ szűrő felbontásából, azaz figyelembe véve, hogy $(1 - L^s) = (1 - L)(1 + L)(1 - iL)(1 + iL)$.

felírt változata is (Franses [1998], Lieli [1999]). A lag-polinom felbontásából ellenőrizhető, hogy a szezonális differenciaszűrő a nemszezonális, illetve a különböző szezonális komponensek szorzataként felírható, azaz feltételezzük a szezonális és nemszezonális egységgyökök meglétét és a megfelelő komponensek függetlenségét is. Utóbbi feltételezés egyébként nem ritka a statisztikai-ökonometriai modellezésben: a legtöbb dekompozíciós modell (nem csak idősorok esetében) feltételezi a modell komponenseinek függetlenségét. A feltételezés sok esetben jelent könnyebbé, amennyiben azonban a feltételezés(pár) nem állja meg a helyét, felléphet a túldifferenciálás problémája, hiszen a szezonális differenciaképzés a nemszezonális egységgyököt, illetve valamennyi szezonális frekvenciához tartozó egységgyököt közömbösíti.

Érdeemes megemlítenünk az ún. Airline-modellt (Box–Jenkins [1970]), amelyet a szerzők a repülőgéppel utazók számának idősoros modellezésére készítettek, és amelyet a gyakorlatban azóta is sokszor alkalmaztak. Az Airline-modell egymás mellett használja az időrendi és a szezonális differenciaképzést.

Végül tekintsünk egy olyan negyedéves gyakorisággal szimulált idősort, amely a tanulmányban később bemutatott fogalomrendszer használata mellett periodikusan integrált.⁴ A szimulált idősor az 1. ábrán látható. A multiplikatív idősorokra jellemzően a trend emelkedésével a szezonális kilengések is nagyobbak látszódnak. Az Airline-modell „prototípus” idősora nagyon hasonló karakterisztikájú.

1. ábra. Szimulált idősor



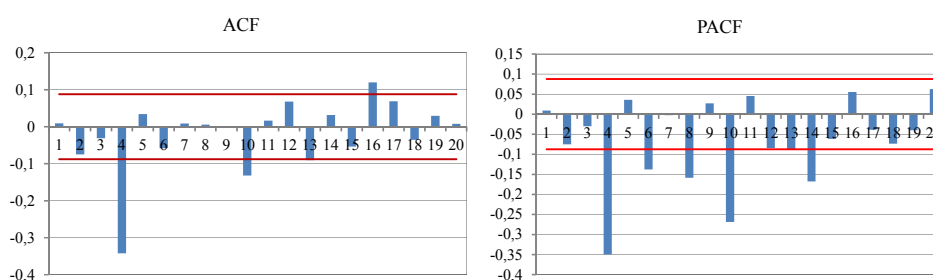
Forrás: Itt és a további ábráknál és táblázatoknál saját számítás és szerkesztés.

Mivel a gyakorlatban sokszor előfordul, bemutatjuk az $(1-L)(1-L^4)$ szűrő használata után kapott korrelogram-eredményeket. Jól látható, hogy az így kapott

⁴ A szimulált modell a következő: $y_t = c + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$, ahol a paramétereink: $c = 5$, $\alpha_1 = 1,25$, $\alpha_2 = 0,80$, $\alpha_3 = 0,83$, $\alpha_4 = 1,20$ (azaz ezen együtthatók szorzata 1), és $\varepsilon_t \sim N(0,10)$, $t = 1, 2, \dots, 500$. A paraméterek értelmezését, származtatását lásd a későbbi fejezetekben.

idősorba a nem megfelelő szűrő alkalmazásával hamis struktúrát vittünk, így – jellemzően a páros késleltetési rendű – autokorrelációs együtthatók szignifikánsan különböznek nullától. (Lásd a 2. ábrát.) Magasabb késleltetés szám mellett készítve a korrelogrammot, az együtthatók már a konfidenciasávon belül maradnak.

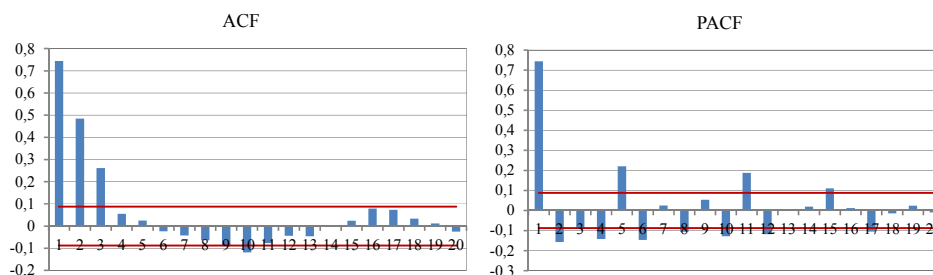
2. ábra. $(1-L)(1-L^4)$ differenciaszűrő alkalmazása után készített korrelogram



Megjegyzés. Itt, valamint a 3. és 4. ábránál a két párhuzamos fekete vonal a 95 százalékos megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumot, a vízszintes tengely pedig a késleltetésszámokat jelöli.

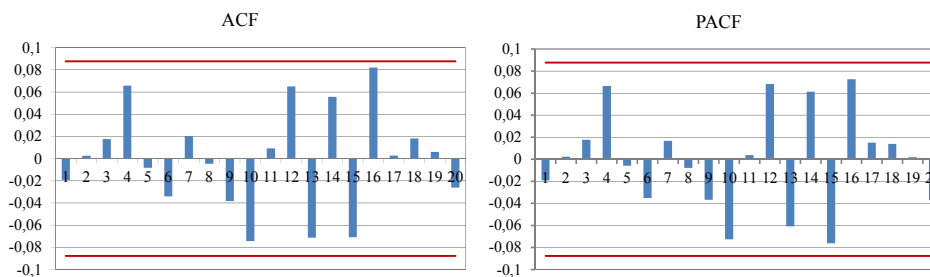
Érdeemes megvizsgálni az $(1-L^4)$ szűrő alkalmazásával kapott idősort is. Szignifikáns együtthatók itt is vannak, sőt, magasabb késleltetésszám mellett készítve a korrelogrammot, az autokorrelációs együtthatók lefutása szinuszosan alakul, tehát a szűrő hagy még némi szezonális viselkedést maga után.

3. ábra. $(1-L^4)$ differenciaszűrő alkalmazása után készített korrelogram



Természetesen még további „hibás” specifikációk is elképzelhetők. A hibás specifikációról – jó esetben – a reziduumok „szokatlan” viselkedését tükröző korrelogram is tájékoztathat. Ezek részletes bemutatásától azonban most eltekintünk.

Megfelelően szűrve az idősort – azaz az $(1-\alpha_s L)$ szűrőt használva, természetesen – a szűrt idősor fehér zaj lesz. (Lásd a 4. ábrát.) Ennek részleteit tárgyalja majd tanulmányunk.

4. ábra. $(1 - \alpha_s L)$ differenciaszűrő alkalmazása után készített korrelogram

Érdeemes megjegyezni, hogy a függetlenség egyben azt is jelenti, hogy például az $(1 - L)$ és $(1 - L^4)$ differenciaoperátorok használatának sorrendje tetszőleges. Utóbbi könnyen belátható, ha megfelelő sorrendben képezzük a jelölt differenciákat.⁵ A gyakorlatban problémát okozhat az, ha első lépésben az $(1 - L)$ szűrőt alkalmazzuk, hiszen ez az szezonális $(1 - L^4)$ szűrő feladatát részben elvégzi, de – természetesen – a szezonális hatásokat nem távolítja el. Ekkor az $(1 - L^4)$ szűrőt választva már túldifferenciálunk: a nemszezonális egységgyököt duplán szűrjük (feltételezve, hogy a szezonális szűrő önmagában elégséges lett volna).

Mindennek ellenére a gyakorlatban az $(1 - L)(1 - L^s)$ szűrő jól működik és sokszor jobb előrejelzéseket ad (*Granger–Newbold* [1986], *Clements–Hendry* [1997]). Noha valamennyi egységgyök meglétének tesztelése lehetséges ugyan, de nehézkes, és fontos modellezői döntést is igényel, hiszen a létező tesztek ereje gyenge. Emiatt a tanulmány végén bemutatjuk majd ennek a differenciaoperátornak is a viselkedését a vizsgált idősorokon.

2. Módszertani áttekintés

A fejezet célja annak a módszertani keretnek az ismertetése, amelyet a tanulmányban alkalmazunk. Bemutatjuk a periodikus autoregresszív (PAR) modellstruktúrát és röviden az alkalmazható modellszelekciós lépéseket (a késleltetési rendet, a periodicitást, a változószelekciót), valamint azt, hogy az említett keretrendszerben az egységgyök megléte vagy hiánya, illetve típusa hogyan tesztelhető, továbbá definiáljuk a periodikus integráció fogalmát. Ismertetjük az alkalmazási lehetőségeket, majd az ezt követő fejezetben konkrét példá(k)ra alkalmazzuk ezeket. A könnyebb átte-

⁵ $(y_t - y_{t-1}) - (y_{t-4} - y_{t-5}) = (y_t - y_{t-4}) - (y_{t-1} - y_{t-5})$. Láthatóan a műveletek elvégzésének felcserélt sorrendje azonos eredményre vezet.

kinthetőség végett negyedéves idősoros modellkeretben mutatjuk be az egyes lépéseket, az empirikus példákban havi periodicitású idősorokkal dolgozunk.

2.1. A periodikus autoregresszív modellstruktúra

Induljunk ki a hagyományos p -ed rendű autoregresszív modell felírásából:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad /1/$$

ahol ε_t fehér zaj.

Ennek kiterjesztése p -ed rendű periodikus autoregresszív modellre a következő:

$$y_{t,s} = \phi_{1,s} y_{t-1} + \phi_{2,s} y_{t-2} + \dots + \phi_{p,s} y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad /2/$$

ahol ε_t fehér zaj, a periodicitásnak megfelelően negyedéves idősorok esetén $s = 1, 2, 3, 4$. A /2/ felírásból látható, hogy a $\phi_{p,s}$ p -ed rendű késleltetéshez tartozó paraméterek szezononként, periódusonként különböznek.

A /2/ egyenlet felírható interakciós változók felhasználásával a késleltetések, illetve a szezonoknak megfelelő dummy változók interakcióit képezve is az alábbi módon:

$$y_t = \sum_{s=1}^4 \left[\phi_{1,s} (D_s \cdot y_{t-1}) + \phi_{2,s} (D_s \cdot y_{t-2}) + \dots + \phi_{p,s} (D_s \cdot y_{t-p}) \right] + \varepsilon_t, \quad /3/$$

ahol D_s a szezonoknak megfelelő dummy változó, ε_t pedig fehér zaj (*Franses–Paap* [1996]). Innen is látható, hogy a becslési feladat egyetlen egyenlet legkisebb négyzetek módszerével történő becslése.

A periódusról periódusra változó autoregresszív együtthatók empirikus alátámasztása az, hogy különböző idősorok esetén például az első negyedéves érték nem úgy függ az előző év negyedik negyedévi értékétől, mint a második negyedévi az elsőétől.

Érdeemes még említést tenni a modell egyenletrendszerként történő felírásáról, ahol az egyenletek száma – értelemszerűen – azonos a szezonok számával, azaz:

$$\Phi_0 Y_{T,s} = \Phi_1 Y_{T-1,s} + \Phi_2 Y_{T-2,s} + \dots + \Phi_p Y_{T-p,s} + E_T, \quad /4a/$$

ahol $E_T = [\varepsilon_{T,1} \quad \varepsilon_{T,2} \quad \varepsilon_{T,3} \quad \varepsilon_{T,4}]^T$ fehér zaj és $s = 1, 2, 3, 4$.

A /4a/ egyenletrendszerben szereplő változóink a következők:

$$Y_{T,s} = [y_{T,1} \quad y_{T,2} \quad y_{T,3} \quad y_{T,4}], \quad /4b/$$

illetve

$$Y_{T-1,s} = [y_{T-1,1} \quad y_{T-1,2} \quad y_{T-1,3} \quad y_{T-1,4}], \quad /4c/$$

azaz a T -edik és a $(T-1)$ -edik évek negyedévei szerepelnek az éves vektorokban. Láthatóan a negyedévente megfigyelt y_t változók indexe megváltozott. A t időváltozót, amelyet negyedéves gyakorisággal rögzítettünk /2/, lecseréltük a T, s időváltozóra, amely szintén negyedévenként rögzít, de megmutatja azt is, hogy mikor melyik év, mely negyedévéről van szó (/4b/ és /4c/).

A paramétereket tartalmazó mátrixok esetében az első index a késleltetés rendjére utal, a második pedig arra, hogy az adott késleltetési rend melyik periódus egyenleténél érvényes, így a négy késleltetést tartalmazó modellre egyszerűsítve az említetteket, a paramétermátrixok a következők:

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{1,2} & 1 & 0 & 0 \\ -\phi_{2,3} & -\phi_{1,3} & 1 & 0 \\ -\phi_{3,4} & -\phi_{2,4} & -\phi_{1,4} & 1 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \Phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{4,1} & \phi_{3,1} & \phi_{2,1} & \phi_{1,1} \\ 0 & \phi_{4,2} & \phi_{3,2} & \phi_{2,2} \\ 0 & 0 & \phi_{4,3} & \phi_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{4,4} \end{bmatrix}. \quad /4d/$$

Azaz például a Φ_1 mátrix /4d/ első sora azt mutatja, hogy a T -edik év első negyedéve hogyan függ a $(T-1)$ -edik év első, második, harmadik és negyedik negyedéveitől. A sorrend a mátrixban természetesen pont fordított, mint az időbeli késleltetés rendje indokolná, hiszen a T -edik év első negyedévé a $(T-1)$ -edik év negyedik negyedéve előzi meg és együttthatója éppen ezért $\phi_{1,1}$.

Az előzőek alapján már rekonstruálható is az egyenletrendszer, ami tehát az alábbi (átrendezés után, lásd az előző bekezdésben foglaltakat):

$$\begin{aligned} y_{T,1} &= \phi_{1,1}y_{T-1,4} + \phi_{2,1}y_{T-1,3} + \phi_{3,1}y_{T-1,2} + \phi_{4,1}y_{T-1,1} + \varepsilon_{T,1}, \\ y_{T,2} &= \phi_{1,2}y_{T,1} + \phi_{2,2}y_{T-1,4} + \phi_{3,2}y_{T-1,3} + \phi_{4,2}y_{T-1,2} + \varepsilon_{T,2}, \\ y_{T,3} &= \phi_{1,3}y_{T,2} + \phi_{2,3}y_{T,1} + \phi_{3,3}y_{T-1,4} + \phi_{4,3}y_{T-1,3} + \varepsilon_{T,3}, \\ y_{T,4} &= \phi_{1,4}y_{T,3} + \phi_{2,4}y_{T,2} + \phi_{3,4}y_{T,1} + \phi_{4,4}y_{T-1,4} + \varepsilon_{T,4}. \end{aligned} \quad /4e/$$

Érdemes megjegyezni, hogy a mátrixoknak praktikus tartalma is van, hiszen Φ_0 az azonos, Φ_1 a megelőző évbe eső negyedévekhez tartozó késleltetések paramétereit tartalmazza.

Összefoglalva tehát a bemutatott PAR-modellnek háromféle felírása lehetséges. A /2/ felírással a legkönnyebben interpretálható a modell alapötlete, a /3/ felírás elsősorban a becslési eljárás érzékeltetés szempontjából hasznos. A /4a/ egyenletrendszeres felírás ugyan idegennek tűnik az egyváltozós autoregresszív modellek hagyományos, egyegyenletes felírásától, és mint azt korábban említettük, a becslési módszer is egy hagyományos egyegyenletes becslés. A többegyenletes felírás azonban a periodikusságból adódóan egyrészt praktikus reprezentáció, másrészt ez a reprezentáció alkalmas lesz bizonyos eredmények levezetésére, így többek között egységgyöktesztelésre, illetve elemzések elvégzésére is.

2.2. Modellszelekciós lépések áttekintése

A késleltetési rend megválasztása történhet a hagyományos módon Wald-féle F -statisztika alkalmazásával. Ebben az esetben a nullhipotézis szerint a $(p + 1)$ -edik késleltetés együtthatói valamennyi negyedévben azonosan 0-k, míg az alternatív hipotézis szerint létezik az előbbieik között olyan paraméter, amelyik szignifikánsan különbözik 0-tól. Emellett természetesen a szelekciós kritériumok felhasználásával is dönthetünk a megfelelő késleltetési rendről (Bayes információs kritérium (BIC), Akaike információs kritérium (AIC), korrigált R^2 (R^2_{adj}) alapján).

Hasonlóan a Wald-féle F -statisztika segít eldönteni azt, hogy szükséges-e a szezononként eltérő autoregresszív paraméterek alkalmazására, vagy sem. Ekkor a tesztelendő nullhipotézis az azonos késleltetési rendhez tartozó autoregresszív együtthatók szezonok közötti azonosságára vonatkozó megszorítást fogalmazza meg (például negyedévenként különböző autoregresszív együtthatók helyett elég egy minden negyedévben azonos autoregresszív együttható).

A modellbe természetesen egyéb változók is bevonhatók, például trend, szezonális dummy változók, hőmérséklet, ünnepnapot jelölő dummy változók, outliererek dummy változók stb. A változók modellben történő szerepeltetéséről ugyanúgy t -, illetve F -statisztikák felhasználásával dönthetünk.

2.3. Egységgyök tesztelése

Mint azt a bevezető fejezetekben már említettük, elképzelhető olyan eset, amikor a sztochasztikus trend és a szezonális komponensek egymástól nem függetlenek és nem feltétlenül létezik valamennyi egységgyök, így a lag-polinom korábbi fejezetben

bemutatott felbontása nem helyénvaló. Az egységgyök praktikusán ebben az esetben azt jelenti, hogy szezononként az idősorba beépülő véletlenek szezononként különböző hatással, éves szinten azonban átlagosan egységnyivel épülnek be az idősorba. Ezekben az esetekben az alkalmazandó differenciaképzés is szezononként különböző lesz, azaz – a szakirodalomban elterjedt fogalmat használva – az ún. periodikus differenciaoperátort fogjuk használni. Ezért lesz kézenfekvő a periodikus autoregresszív modell alkalmazása.

Az egységgyöktesztelés folyamata két lépésből áll. Ezeket mutatjuk be a következő szakaszban.

2.3.1. Egységgyök meglétének tesztelése

A szakirodalomnak megfelelően először elsőrendű késleltetés mellett mutatjuk be az eredményeket. Tegyük fel tehát, hogy az elsőrendű periodikus autoregresszív modell a következők szerint írható fel:

$$y_t = \phi_{1,s} y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad /5/$$

ahol ε_t fehér zaj. Ekkor a megfelelő mátrix reprezentáció:

$$\Phi_0 Y_{T,s} = \Phi_1 Y_{T-1,s} + \varepsilon_T, \quad /6/$$

ahol a mátrixok a 2.1. alfejezetben bemutatottak alapján könnyen származtathatók.

A /6/ egyenletrendszer formában felírt folyamatunk stacioner akkor, ha a megfelelő karakterisztikus egyenlet gyökei az egységkörön kívül esnek (*Boswijk–Franses* [1995]). Ebben az esetben ez a

$$|\Phi_0 - \Phi_1 z| = 0 \quad /7a/$$

karakterisztikus egyenlet megoldását jelenti. A determináns kifejtve a karakterisztikus polinomunk:

$$(1 - \phi_{1,1} \phi_{1,2} \phi_{1,3} \phi_{1,4} z) = 0, \quad /7b/$$

amelynek láthatóan legfeljebb egyetlen egy egységgyöke lehet. Az egységgyök meglétének tesztelése így az alábbi nullhipotézis ellenőrzését jelenti:

$$H_0 : \phi_{1,1} \phi_{1,2} \phi_{1,3} \phi_{1,4} = \prod_{s=1}^4 \phi_{1,s} = 1, \quad /8a/$$

szemben a következő alternatív hipotézissel:

$$H_1 : \phi_{1,1}\phi_{1,2}\phi_{1,3}\phi_{1,4} = \prod_{s=1}^4 \phi_{1,s} < 1. \quad /8b/$$

Azaz a nullhipotézis elfogadása azt jelenti, hogy az idősorunk periodikusan integrált, elvetése pedig azt, hogy periodikusan stacioner. Másképpen kifejezve, amennyiben a karakterisztikus polinom gyöke egységnyi, az idősor periodikusan integrált, amennyiben a gyök az egységkörön kívül esik, periodikusan stacioner. A periodikus stacionaritás kifejezés annyit jelent, hogy a stacionaritás szigorúan véve ekkor sem teljesül, hiszen az autokovarianciák csak periódusonként állandók.

A hipotézisek ellenőrizhetők likelihood arány (likelihood ratio – LR-) teszt számításával (lásd többek között *Boswijk–Franses* [1995], *Boswijk–Franses* [1996], *Franses* [1996], *Osterwald-Lenum* [1992]). Az LR-statisztikából származtatható egy másik tesztstatisztika is, amelyről *Boswijk–Franses* [1996] belátták, hogy a nullhipotézis érvénye esetén standard Dickey–Fuller-eloszlást követ (*Fuller* [1976], *Boswijk–Franses* [1996]).

Másodrendű periodikus autoregresszív modell esetében az

$$y_t = \phi_{1,s}y_{t-1} + \phi_{2,s}y_{t-2} + \varepsilon_t \quad /9a/$$

a következők szerint írható át:

$$y_t - \alpha_s y_{t-1} = \beta_s (y_{t-1} - \alpha_s y_{t-2}) + \varepsilon_t, \quad /9b/$$

amely modell esetében a karakterisztikus egyenlet (*Boswijk–Franses*[1995]):

$$|\Phi_0 - \Phi_1 z| = (1 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \cdot z)(1 - \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \cdot z). \quad /10/$$

Ezt a felírást alkalmazva az általánosított hipotéziseink:

$$H_0 : \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = \prod_{s=1}^4 \alpha_s = 1, \quad /11a/$$

$$H_1 : \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = \prod_{s=1}^4 \alpha_s < 1. \quad /11b/$$

Ebben az esetben is azt ellenőrizzük tehát, hogy a karakterisztikus polinomnak létezik-e olyan gyöke, amely egységnyi.

A /9b/ egyenlet nemlineáris legkisebb négyzetek módszerével becslendő (Boswijk–Franses [1995]), és az is jól látszik, hogy elsőrendű modell esetében a β_s paraméterek azonosan zérók. Emellett megjegyezhető, hogy a felírás magasabb rendű modellekre is kiterjeszhető, azonban a gyakorlatban az a tapasztalat, hogy magas késleltetési rend viszonylag ritka.⁶

2.3.2. Egységgyök típusának tesztelése

Amennyiben az első lépésben az egységgyök megléte mellett döntünk, az egységgyök típusának ellenőrzése esetén kétféle nullhipotézis vizsgálendő:

$$H_0 : \alpha_s = 1, \quad /12a/$$

ahol $s = 1, 2, 3$ (ha ezekre teljesül a feltevés, akkor a negyedik negyedévre is);

$$H_0 : \alpha_s = -1, \quad /12b/$$

ahol $s = 1, 2, 3$ (ha ezekre teljesül a feltevés, akkor a negyedik negyedévre is).

A tesztelésre használt Wald-féle F -statisztikák mögött meghúzódó logika az, hogy az együttthatókra azt az egyébként lineáris megkötést tesszük, hogy értékük azonosan $+1$ vagy -1 . Előbbi megkötés egyébként a nemszezonális egységgyök, utóbbi a féléves ciklusnak megfelelő szezonális egységgyök tesztelését jelenti. Mindkét nullhipotézis elvetése esetén periodikusan integrált idősról beszélünk (periodically integrated autoregressive model – PIAR).⁷

2.4. Elemzési lehetőségek

Ebben a fejezetben ismertetjük, hogy a bemutatott PIAR-modell eredményei milyen elemzési lehetőségekkel szolgálnak.

⁶ A tanulmány készítése során használt R programcsomag is csak legfeljebb másodrendű modellek becslését teszi lehetővé.

⁷ Szemben a nullhipotézisbeli folyamatokkal, amiknek a rövid neve PARI (PAR model for $I(1)$ time series). Utóbbinál a név beszédessége csak akkor érvényesül, ha egynél magasabb rendű folyamatról van szó, hiszen tekintve a /9b/ $y_t - \alpha_s y_{t-1} = \beta_s (y_{t-1} - \alpha_{s-1} y_{t-2}) + \varepsilon_t$ modellfelírást, elsőrendű modell esetében a bal oldal differenciára egyszerűsödik, a jobb oldal pedig a véletlen folyamatra; elsőnél magasabb rendű modellenél már jól látható, hogy a β_s paraméterek szezononként különböznek, és ezek lesznek a késleltetett differenciák autoregresszív együttthatói.

2.4.1. A sokkok hosszú távú hatásának számítása

A korábbi fejezetben bemutatott egyenletrendszer-reprezentációt alkalmazva röviden ismertetjük, hogy a vizsgált modellkeretben a sokkok időbeli lefutása hogyan elemezhető. Az eredmények – természetesen – magasabb késleltetési rend feltételezése mellett egyszerűen kiterjeszthetők, de az egyszerű igazolás és a tanulmány empirikus fejezetének megalapozása végett maximum négy késleltetést tartalmazó modell feltételezése mellett dolgozunk (azaz két paramétermátrixunk lesz, Φ_0 és Φ_1). Ebben az esetben modellünk:

$$\Phi_0 Y_{T,s} = \Phi_1 Y_{T-1,s} + E_T. \quad /13a/$$

Mindkét oldalt balról megszorozva a Φ_0^{-1} mátrixszal jutunk a következő felírás-hoz:

$$Y_{T,s} = \Phi_0^{-1} \Phi_1 Y_{T-1,s} + \Phi_0^{-1} E_T, \quad /13b/$$

ahol érdemes külön definiálni a

$$\Gamma = \Phi_0^{-1} \Phi_1 \quad /14/$$

mátrixot. Mint azt korábban említettük Φ_0 mátrix az éven belüli szezonok, Φ_1 mátrix pedig a megelőző év szezonjainak a következő év szezonjaira való hatását mutatja, így a Γ mátrix praktikusán a megelőző év szezonjainak begyűrűző hatását mutatja a következő év szezonjaira. Így már könnyen látható az is, hogy a Φ_0^{-1} mátrix nem tartalmaz mást, mint a sokkok éven belül begyűrűző hatását.

A Γ mátrix felhasználásával származtathatjuk a sokkok időbeli lefolyását mutató mátrixot is:

$$\Gamma \Phi_0^{-1} = \Phi_0^{-1} \Phi_1 \Phi_0^{-1}. \quad /15/$$

Mivel a Φ_0^{-1} mátrix a sokkok éven belül begyűrűző hatását mutatja, így a Φ_1 mátrixot balról, illetve jobbról szorozni lényegében hasonló dolgot jelent, csak eltérő nézőpontból. A bal oldalról történő szorzás azt biztosítja, hogy a megelőző év szezonjainak hatását vizsgáljuk a következő év szezonjaira. A jobb oldalról történő szorzás esetében a sokkok begyűrűzése a megelőző év szezonjai között releváns, és a Φ_0^{-1} mátrix alsóháromszög mátrix tulajdonsága biztosítja azt, hogy a különböző negyedévek hatásának a Γ mátrix által számított együtthatói ugyanezen negyedéve-

kig a megelőző évben lezajló begyűrűző hatásokat súlyozzák. Ez a jobb oldalról történő szorzás mintegy útelemezésként is felfogható, hiszen a megelőző év egy adott negyedévben érkező sokk hatása a késleltetések számától függően több (azaz itt egy, kettő, három vagy négy) negyedév hatásán keresztül gyűrűzik be.

Így a mátrix egy-egy oszlopa azt mutatja, hogy egy adott szezonban érkező sokk hogyan fut végig az év során, egy-egy sora pedig azt, hogy a különböző szezonokban érkező sokkok egy adott szezonra milyen hatással vannak.

A mátrixot tehát oszlopszinten vizsgálva megállapítható, hogy melyik negyedévnek van a legerősebb hosszú távú hatása (ahol az oszlopösszeg maximális), illetve mely negyedévek azok, ahol a sokkok leginkább begyűrűznek (ahol a sorösszeg maximális).

Amennyiben a folyamatunk egységgyököt tartalmaz, a mátrix alkalmas arra, hogy feltérképezzük a szezonális és a sztochasztikus trend kapcsolatát. Ez a sztochasztikus trend és a szezonális összekapcsolódásának lényege.

2.4.2. Szezonálisan változó differenciák képzése

Visszatérve a kiindulópontához (az időrendi és szezonális differenciaképzés problémájához), amennyiben egy idősor tekintetében a számítási eredmények alapján úgy döntöttünk, hogy az idősor periodikusan integrált, az idősort az ún. periodikus differenciaképzéssel, azaz szezonálisan változó differenciaoperátor felhasználásával tudjuk kezelni. Az ismert jelölésrendszer mellett, ez az $(1 - \alpha_s L)$ szűrők alkalmazását jelenti, ahol az α_s együtthatók a számítási eredményekből származtathatók és láthatóan szezonfüggők.

3. Az energiapiacok általános jellemzői

Energiapiaci idősorok esetében léteznek olyan, inkább kvalitatívnak mondható tulajdonságok, jellemzők, amelyek helytől is időtől függetlenül érvényesek, ezek – többek között – a következők:

- nemstacionaritás az átlag és a szórás tekintetében,
- többszintű szezonális,
- árfolyamok esetében ártüskék vagy az ún. spike-ok, illetve átlaghoz történő visszahúzás (mean reversion) jelensége.

A stacionaritás hiányának oka részben az, hogy az idősorok tartalmaz(hat)nak trendet, illetve az esetek többségében szezonalitást is. Emellett a szórás is időfüggő

(azaz az idősor nem homoszkedasztikus), hiszen árfolyamok esetében vannak olyan időszakok, amikor azok alakulása jóval volatilisabb (például villamosenergia-árak alakulása nyáron), illetve fogyasztási adatok esetében az ún. átmeneti időszakok (tavasz, ősz) fogyasztása jellemzően jóval változékonyabb.

A szezonális az idősor jellegétől és a megfigyelési gyakoriságtól függően különböző lehet (napon belüli, heti, éven belüli), azaz ez a tény hosszú, közép- és rövid távon is érvényesülő tulajdonság.

Tőzsdei árfolyamoknál jellemző még – rövid távon – az ártüskék jelensége, ahol a kiugró, hirtelen árfolyamváltozást követően az idősor jellemzően rövid időn belül visszatér akörüli szintre, amilyen az ártüske létrejötte előtt volt (átlaghoz való visszahúzás (*Burger et al.* [2004])). A spike-ok modellezésének rendkívül nagy szakirodalma van, meg kell ugyanakkor jegyezni, hogy a spike tekintetében a pontos fogalmi meghatározás sem egységes. Vannak, akik a spike-okra úgy tekintenek, mint az idősor szerkesztését alkotó, de egyébiránt extrém értékekre (lásd többek között *Burger et al.* [2004] vagy *Marossy* [2010]), más nézőpontok szerint a spike-ok outlier megfigyelések, és a megfelelő modellezéshez első lépésben ezeket eltávolítjuk az idősorból, majd az ilyen, extrém megfigyelésektől megtisztított idősor elemzésével kell továbblépni. Az ártüskék nyilvánvalóan nehezítik az idősorelemzést – például a szezonális elemzését –, illetve az idősoros kiugró megfigyelésekről egyébként is tudható, hogy a statisztikákat is félrevezetik (egységgyöktesztek strukturális törések melletti alkalmazása esetében lásd például *Mók* [2011]). Látható tehát, hogy az ártüskék kezelése rövid távon igen fontos feladat, a tanulmányban azonban kiemelten a hosszú távon érvényesülő komponensekkel (trend és éven belüli szezonális) foglalkozunk.

4. Forgalom és likviditás az európai energiatőzsdéken

Mivel a tanulmányban energiapiaci tőzsdék kereskedési adatait elemezzük, ezért röviden áttekintjük a tőzsdei forgalom néhány közvetve vagy közvetlenül kapcsolódó, releváns vonatkozását.

Az energiatőzsdéken, különösen a kontinentális Európában természetesen közel sem beszélhetünk olyan likviditásról, mint amilyen a pénzügyi piacokon megfigyelhető.⁸ Ennek egyik magyarázata, hogy az energiatőzsdék időben jóval később jelennek meg, ennél fogva nem is állnak a fejlődés azon szintjén, különösen a határidős

⁸ Az energiatőzsdék likviditását egyébként a pénzügyekben is használt bid-offer spread mellett a churn rátával (churn rate) mérik, amely definíciótól függően a teljes kereskedett volumen és a fizikai szállítással is együtt járó kereskedett volumen vagy földgáz esetében az adott hub (gáztőzsde) területén leszállított teljes fizikai gázmennyiség hányadosa (*Heather* [2012]).

termékek (futures) esetében. Az azonnali (day-ahead, spot), illetve napon belüli (within-a-day) piacoknál pedig annak a ténynek a figyelembe vétele fontos, hogy a pénzügyi tranzakcióval együtt fizikai tranzakció is történik (physical trading). Utóbbi esetben a kereskedés célja elsősorban napi portfóliókiigazítás, napon belüli kiegyensúlyozás (balancing), a határidős kereskedés esetében (ahol csak pénzügyi elszámolás történik, financial trading) a cél elsősorban a kockázatkezelés, fedezés (hedge).

Európai szinten a villamosenergia-tőzsdék, illetve a földgáz hub-ok működését mindenképpen érdemes külön tárgyalni, már csak a különböző fejlettségi szintek végett is. Az utóbbi időkben – nemzetközi és hazai viszonylatban is – a földgáz hub-ok kaptak valamivel nagyobb figyelmet, a nem tradicionális források (LNG, shale gas), illetve az olajindexált árazástól történő „elszakadás” kérdése végett. Hogy utóbbi mennyiben valósulhat meg, arról a vélemények eltérők, adódik a lehetőség, hogy az olajindexálás mellett az alternatív árazási, indexálási módok alapját a tőzsdék jelenthetik majd. Hogy az európai tőzsdék közül melyik válhat igazán *benchmark*, ármeghatározó tőzsdévé, arra a kontinentális európai piacon a legnagyobb esélye a holland TTF (title transfer facility) hub-nak van. Igaz ugyan, hogy forgalma elmarad az egyesült királyságbéli NBP-től (national balancing point)⁹, az amerikai tőzsdékétől pedig különösen, előnye azonban az energiakereskedők szempontjából, hogy az energiamennyiség adta kockázat és a devizakockázat rajta keresztül kiküszöbölhető (MWh és therm, illetve EUR és GBP). Emellett számos kisebb európai hub létezik még, azonban ezek nagy valószínűséggel a portfóliókiigazítást vagy a kiegyensúlyozást támogatják majd inkább, mintsem ármeghatározó szerepük legyen (*Heather* [2012]).

5. A tanulmányban vizsgált idősorok bemutatása

A tanulmányban tárgyalt idősorok néhány tulajdonságát és a (előzetesen) bemutatott részeredményeket foglalja össze az 1. táblázat.

A gáztőzsdék forgalma az elmúlt időszakban valóban növekedett, mind a fizikai, mind a pénzügyi kereskedést illetően, a villamosenergia-tőzsdék esetében ez a trend kevésbé egyértelmű. Az idősorokat tekintve felfedezhető némi gyengébb-erősebb szezonális is, a földgáz esetében a szezonális valamivel egyszerűbb, nyilvánvalóbb (elsősorban a téli fűtési hatás végett fellépő nagyobb forgalom jelenik itt meg), míg a villamos energia tekintetében a folyamatok jóval komplexebbek (gondoljunk például a napon belüli kereskedés hatására a megújuló energiaforrások térnyerésével párhuzamosan, földgáz- és szénpiacok tendenciáinak villamosenergia-piacra kifejtett hatására stb.).

⁹ A TTF és az NBP virtuális földgáz-kereskedési pontok.

1. táblázat

A tanulmányban vizsgált idősorok és tulajdonságaik

Idősor*	Tartalom, leírás	Jellemzők	Bemutatott eredmények
TTF nominálás volumenidősor	A TTF-en kereskedett földgáz azon hányada, amely a holland rendszerirányítónál (Gasunie Transport Services – GTS) is regisztrálásra került**	Egyértelmű emelkedő trend, fűtési hatás okozta szezonális	Trend és szezonális szűrés
Európai Energiatőzsde (European Energy Exchange – EEX) Phelix day-ahead volumenidősor	Az EEX német és osztrák régióban kereskedett day-ahead (spot) villamos energia volumene	Enyhén emelkedő trend, „zajos” szezonális	Trend és szezonális szűrés, szinteltolás kezelése
EEX Phelix day-ahead átlagárfolyam-idősor	Az EEX német és osztrák régióban kereskedett day-ahead (spot) villamos energia átlagárfolyama	Trend iránya nem egyértelmű, „zajos” szezonális	Trend és szezonális szűrés, szinteltolás kezelése
Északi Villamosenergia-tőzsde (Nordic Electricity Exchange – Nordpool) Elspot day-ahead átlagárfolyam-idősor	A teljes Nordpoolon kereskedett day-ahead (spot) villamos energia átlagárfolyama	Trend iránya nem egyértelmű, „zajos” szezonális, kiugró árszintek	Trend és szezonális szűrés, (szezonális) kiugró árszintek kezelése
Nordpool nyugati és keleti dán régiójának volumenidősora, havi	A Nordpool két dán régiójában kereskedett day-ahead (spot) villamos energia volumene	Enyhén emelkedő trend, „zajos” szezonális	Nincs egységgyök

* Az idősorok havi gyakoriságúak.

** Azaz az a mennyiség, amit a holland földgázrendszeren szállítók (shipper-ek) nomináltak a rendszer hálózati pontjaira. A nominálás előzetes igénybejelentést – a következő időszakra (általában napra vagy napon belül órákra) megadott földgázigényt – jelent. Szabályozása (az igénybejelentés, kereskedés granularitása (napi, órás), az igénybejelentés határideje a fizikai szállítást megelőzően) országonként különböző lehet.

Forrás: Az adatok forrását lásd a Függelék 1-ben.

6. Empirikus eredmények

Az eredményeket részletesen a TTF day-ahead kereskedés volumenadatain keresztül mutatjuk be, a többi idősor esetében csak a fontosabb végeredményeket és következtetéseket közöljük. A számítások az *R* ingyenesen elérhető, nyílt forráskódú programcsomag felhasználásával készültek.

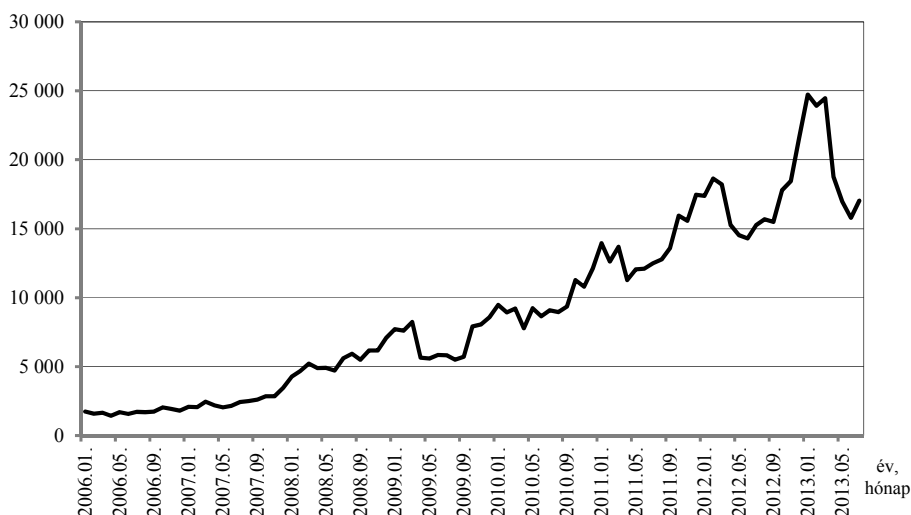
6.1. A TTF idősorának elemzése

A TTF havi volumene 2006. januártól az 5. ábrán látható módon alakult. Az adatok ugyan korábbi időszakokra is elérhetők, azonban akkor még a kereskedés volumene jóval kisebb volt, és az idősor kevésbé mutatta a ma már jóval szembetűnőbb szezonális mintát, miszerint a téli hónapokban a kereskedés volumene jellemzően nagyobb.

Nagyságrendi összehasonlítás végett érdemes megemlíteni, hogy Magyarországon az elmúlt évek éves országos földgáz fogyasztása 12 és 14 milliárd köbméter között alakult, a TTF kereskedési volumene 2011 után ezt gyakorlatilag minden hónapban meghaladta, a legutóbbi téli időszakban ennek már duplája volt.

5. ábra. TTF havi volumen alakulása

Millió köbméter



Forrás: GTS, <http://www.gasunietransportservices.nl>

Az idősorban a forgalomnövekedés a már említett szezonális mellett rendkívül szembetűnő növekvő tendenciát mutat,¹⁰ és a trend növekedésével a szezonális kilengések is nagyobbak tűnnek, ami a trend és szezonális komponensek multiplikatív összekapcsolódására enged következtetni.

¹⁰ Pénzügyi piacok kapcsán a 2008-as válság óta kiemelkedő szerepe van a piaci likviditás vizsgálatának, elsősorban az árfolyam-alakulásra gyakorolt hatása tekintetében. A kereskedési volumen csak egy igen durva közelítéssel szolgálhat a likviditás mértékének jellemzésére, és valószínűleg nem is elégséges ebben a tekintetben. A kereskedési volumen vizsgálatát illetően vannak ellentmondások a kutatási eredményekben, bizonyos eredmények a kereskedési volumen long memory tulajdonságát támasztják alá (*Lobato-Velasco* [2000]), míg mások a determinisztikus trendet (*Darbar-Deb* [1995]).

6.1.1. Modellszelekció és integráltság vizsgálata

Első lépésként a modell késleltetésszámának megválasztására Wald-féle F -statisztikát végezve, illetve kiszámítva a modellszelekciós kritériumokat, egy késleltetés alkalmazása mellett döntünk (az eredményeket lásd a Függelék 2-ben).

Az autoregresszív együtthatók azonosságát tesztelő Wald-féle F -statisztika a periodikus autoregresszív modell illesztését részesíti előnyben a szezononként azonos együtthatókat becsülő autoregresszív modellel szemben ($p = 0,000$), tehát az autoregresszív együtthatók szezononként különbözöknek tekinthetők.

Az egységgyök tesztelésére szolgáló statisztikák eredményei a következők. Az LR-teszt jobb oldali kritikus tartománnyal rendelkezik, így a próbafüggvény értéke ($LR = 0,10$) bőven a nullhipotézis elfogadását támasztja alá.¹¹ A második teszt a Dickey–Fuller logika öröklődése végett bal oldali kritikus tartománnyal rendelkezik, és a próbafüggvény értéke ($DF = -0,31$) alapján hozott döntésünk azonos az előző teszt alapján hozott döntéssel.¹²

A teszteredmények alapján a volumenidősor egységgyököt tartalmaz. Az egységgyök típusát tesztelő nullhipotézisek esetében is $p = 0,000$ eredményt kaptunk, az idősorunk tehát periodikusan integrált autoregresszív (PIAR) folyamatként modellezhető. Itt érdemes annyi megjegyzést tennünk, hogy az első teszt hipotézisét valójában egyszer már ellenőriztük, amikor az elsőrendű AR- és elsőrendű PAR-modellek között döntöttünk.

Az eredmények robusztusságának ellenőrzésére érdemes még további modellspecifikációkat is kipróbálni, ezek közül a lineáris trend illesztése melletti specifikációt említjük meg. A modellszelekció hasonló eredményre vezet, érdemes megjegyezni, hogy a trend paramétere alig szignifikáns. A trend mellett tesztelve az egységgyök tulajdonságot, a tesztek ugyanúgy az egységgyök megléte mellett szólnak. Az egységgyök milyenségét tesztelő eredmények is azt erősítik meg, hogy az idősor PIAR-folyamatként modellezhető.

2. táblázat

Modellszelekciós eredmények a TTF volumenidősoron

Kezdet	Vég	Idősor hossza	Késleltetési rend	PAR(p) vs. AR(p), p -érték	LR	DF	+1 gyökteszt, p -érték	-1 gyökteszt, p -érték
2006. 01.	2014. 04.	100	1	0,000	+0,10	-0,31	0,000	0,000

¹¹ Az 5 és 10 százalékos kritikus értékek: szezonális konstans szerepeltetése mellett 9,24, 7,52; szezonális konstans és trend szerepeltetése mellett 12,96, 10,50.

¹² Az 5 és 10 százalékos kritikus értékek: szezonális konstans szerepeltetése mellett -2,86, -2,57; szezonális konstans és trend szerepeltetése mellett -3,41, -3,12.

6.1.2. A PIAR-modell eredményeinek értelmezése

Az előző fejezet eredményei alapján a TTF-idősor periodikusan integrált autoregresszív folyamatként modellezhető, amely a következő módon írható fel:

$$y_t - \alpha_s y_{t-1} = \mu + \varepsilon_t, \quad /16a/$$

vagy

$$y_t = \mu + \alpha_s y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad /16b/$$

ahol ε_t fehér zaj, $s = 1, 2, \dots, 12$, és az α_s paraméterek esetében érvényesítjük tehát az azok szorzatára vonatkozó egységnyi megkötést.

A paraméterbecslés kiemelt eredményei a Függelék 2-ben szerepelnek. Ennek a modellnek a mátrixreprezentációjából kiolvasható, hogy a sokkok hosszú távú hatása szezononként hogyan érvényesül, milyen annak a lefutása (lásd a Függelék 2-ben, a szürkével jelölt sor és oszlop a sor-, illetve oszlopösszegeket tartalmazzák). Az oszlopösszegek maximuma szeptember hónapnál szerepel, azaz a szeptemberi hónapnak van a legerősebb hosszú távú hatása a kereskedett volumenre, a sorösszegek maximuma pedig januárnál, amely mint tudjuk, jellemzően a lehidegebb téli hónap. Az oszlopösszegek az április-szeptemberi (dőlt betűvel kiemelt) hónapokban magasabbak, azaz ezeknek a hónapoknak erősebb a hosszú távú hatása, tehát ha ilyenkor valamiért eltolódik az kereskedett volumen szintje, akkor ez az eltolódás hosszú távon megmarad sokkal inkább, mint a többi hónapban. A sorösszegek az október-március (dőlt betűvel kiemelt) hónapokban magasabbak, azaz a különböző sokkok ezekben a hónapokban gyűrűznek be leginkább, amikor a fűtési hatás igazán erős.

6.1.3. Szezonálisan változó differenciaszűrő alkalmazása

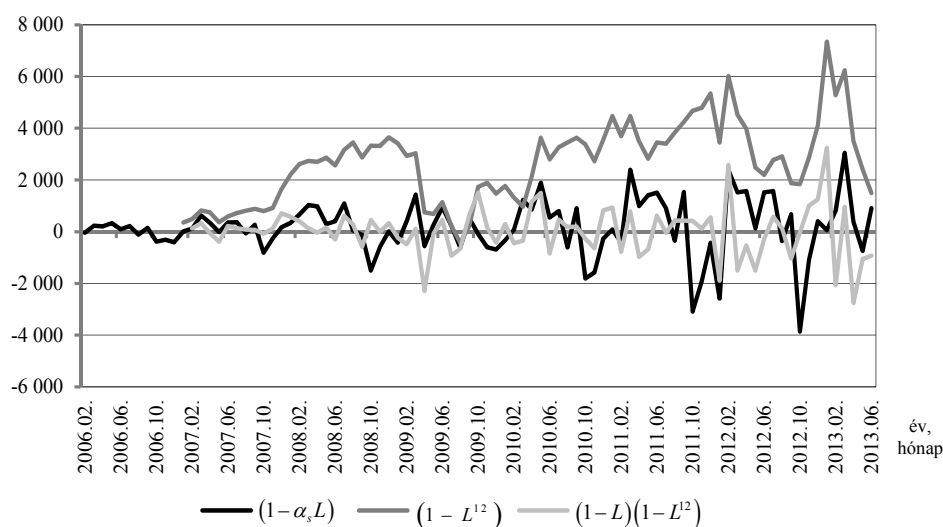
Az elemzést a felállított modellből származtatott ún. periodikus vagy szezonálisan változó differenciák kiszámításával folytatjuk. A hagyományos $(1-L)$ vagy a szezonális $(1-L^{12})$ szűrők felhasználásával analóg módon képezhetők az ún. szezonálisan változó differenciák az alábbi szűrő alkalmazásával: $(1-\alpha_s L)$, ahol az α_s együtthatók a becsült PIAR-modell megfelelő együtthatói. A becsült PIAR-modellünk „szerencés” hozadéka, hogy abban a konstansok szezononként azonosak, így nem kell az $(1-\alpha_s L)$ szűrő alkalmazása után nyert idősort megtisztítani a szezonálisan változó konstanstól, tehát az eredmények közvetlenül összehasonlíthatók a többi szűrő alkalmazása során kapott eredményekkel.¹³

¹³ Lásd a /16a-/16b/ egyenletet.

A 6. ábra a TTF-idősor alapján $(1 - \alpha_s L)$, $(1 - L^{12})$, illetve $(1 - L)(1 - L^{12})$ szűrők felhasználásával képzett idősorokat mutatja.

6. ábra. Különböző szűrők felhasználásával képzett differencia-idősorok a TTF volumenidősoron

Millió köbméter



Jól látható, hogy a szezonális szűrő $(1 - L^{12})$ kiszűrte az idősort jellemző szezonális ingadozást és némileg a növekvő tendenciát is. Ezen idősor korrelogramját vizsgálva a folyamat stacioner, így az időrendi differenciálás felesleges lépés lenne. Ennek ellenére – összehasonlítás végett – képezhetjük a szezonálisan differenciált idősor időbeli differenciáját $((1 - L)(1 - L^{12})$ szűrő), amely már jóval inkább simább idősort eredményez, viszont még mindig viszonylag sok kiugró értékkel (például 2009. április, 2012. január, 2013. január). A periodikus differenciaszűrő alkalmazásával $((1 - \alpha_s L))$ a kiugró megfigyelésektől mentesebb, simább idősort kapunk.

Az $(1 - \alpha_s L)$ és az $(1 - L)(1 - L^{12})$ szűrők eredményeképpen kapott idősorok gyakorlatilag egyformán fehér zajok.¹⁴ A konklúzió így inkább a szűrők alkalmazása mögötti feltételekre vonatkozik, miszerint a periodikus differenciálás esetén nem feltételezzük olyan egységgyök meglétét, amely valójában nem létezik, és ezzel párhuzamosan feloldjuk azt a feltételezésünket, hogy a trend és a szezonális egymástól

¹⁴ A fehér zaj tulajdonság a szezonálisan változó differenciaszűrő esetén egyébként a modell felírásból, az egy késleltetést tartalmazó PIAR-modell (helyes) alkalmazásából következik.

független. Az TTF-idősor ábrája alapján a függetlenség feltételének feloldása indokolható.

6.1.4. Előrejelzések értékelése különböző szűrők alkalmazása mellett

Az eddigi eredmények validálására ellenőrizzük, hogy a szezonálisan változó szűrő használata melletti előrejelzések hogyan alakulnak a többi szűrő alkalmazásához képest. A mintán kívüli teljesítmény értékelésére a következő, ún. gördülőablakos módszert választottuk. A korábbiakban bemutatott becslést a TTF volumenidősorra hét év (azaz 84 hónap) hosszú intervallumokra végeztük el, a becslési intervallumot mindig egy hónappal eltolva. Az így kapott modellek alapján készítettünk előrejelzést mindig a következő hónapra.¹⁵ Az eredményeket tartalmazza a 3. táblázat.

3. táblázat

Előrejelzések értékelése különböző szűrők alkalmazása mellett a TTF volumenidősoron

Alkalmazott szűrő	Szűrt idősorra illesztett modell	RMSE* (millió köbméter)	MAPE** (százalék)
Periodikus	–	345	6,3
Szezonális	AR1	496	11,1
Időbeli és szezonális	–	536	12,1

* Átlagos négyzetes hiba (root mean squared error – RMSE), $RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / n}$.

** Átlagos abszolút százalékos hiba (mean absolute percentage error – MAPE), $MAPE = \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{y_i} / n$.

A szűrt idősorok esetében a végleges modell kiválasztása a korrelogram és az ismert hagyományos modellszelekciós kritériumok (BIC, AIC) alapján történt.

A mintán kívüli eredmények alapján látható, hogy a periodikus szűrő alkalmazásával az előrejelzési hibák közel felére-kétharmadára csökkentek. A jobb előrejelzés természetesen a több becsült paraméternek is köszönhető. Az átlagos négyzetes hibát a hibák egyszerű négyzetes átlagaként, az átlagos abszolút százalékos hibát az időszakonkénti százalékos hibák egyszerű számtani átlagaként számítottuk.

¹⁵ Azaz a 2006. január és 2012. december közötti időszakra becsült modell alapján készítettünk előrejelzést 2013. januárra, a 2006. február és 2013. január közötti időszakra becsült modell alapján 2013. februárra, és így tovább.

6.2. További számítási eredmények

A többi idősor esetében is a korábban ismertett lépések szerint haladtunk, itt csak a főbb eredményeket és következtetéseket ismertetjük. A táblázat a modellszelektációs lépések eredményeként kapott legmegfelelőbb modell eredményeit tartalmazza.

4. táblázat

Modellszelektációs eredmények a tanulmányban vizsgált idősorok esetén

Idősor	Kezdet	Vég	Idősor hossza	Késleltetési rend	PAR(p) vs. AR(p), p -érték	LR*	DF**	+1 gyök- teszt, p -érték	-1 gyök- teszt, p -érték
TTF nominálás volu- menidősor, havi***	2006. 01.	2014. 04.	100	1	0,000	+0,10	-0,31	0,000	0,000
EEX Phelix day-ahead volumenidősor, havi	2007. 01.	2013. 08.	80	1	0,000	+0,70	-0,84	0,000	0,000
EEX Phelix day-ahead átlagárfolyam-idősor, havi	2007. 01.	2013. 08.	80	1	0,000	+6,88	-2,62	0,007	0,000
Nordpool Elspot day- ahead átlagárfolyam- idősor, havi	1999. 01.	2012. 12.	168	2	0,000	+9,48	-3,08	0,013	0,000
Nordpool (Nordic Electricity Exchange) nyugati dán régiójának volumenidősora, havi	2003. 01.	2013. 08.	128	1	0,000	+10,91	-3,30	-	-
Nordpool (Nordic Electricity Exchange) keleti dán régiójának volumenidősora, havi	2006. 01.	2013. 08.	92	1	0,000	+13,18	-3,63	-	-

* Az 5 és 10 százalékos kritikus értékek: szezonális konstans szerepeltetése mellett 9,24, 7,52; szezonális konstans és trend szerepeltetése mellett 12,96, 10,50.

** Az 5 és 10 százalékos kritikus értékek: szezonális konstans szerepeltetése mellett -2,86, -2,57; szezonális konstans és trend szerepeltetése mellett -3,41, -3,12.

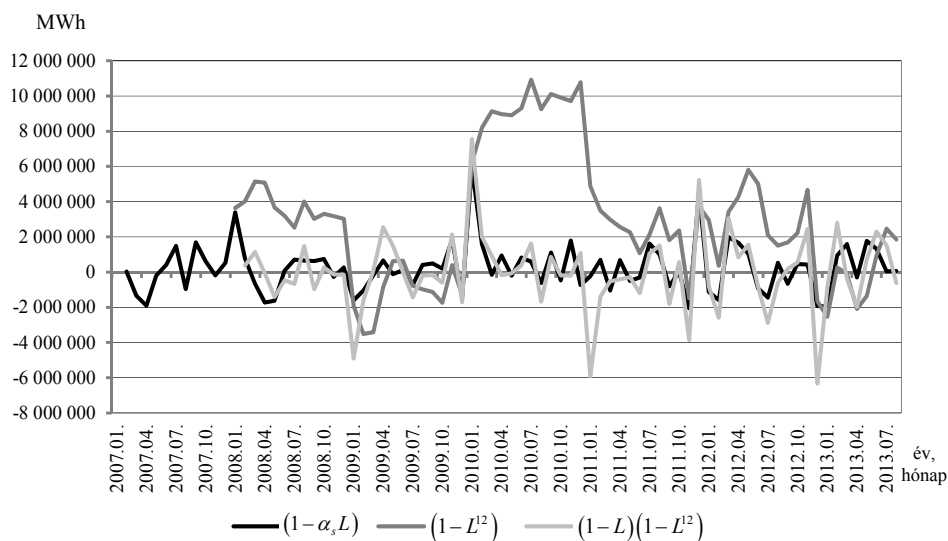
*** Korábbi fejezetben bemutatott eredmények.

Az egységgyök létét tesztelő statisztikák kritikus értékeit figyelembe véve és az ábrák alapján együttesen döntve, a dán kereskedési volumenidősor stacionernek bizonyult.

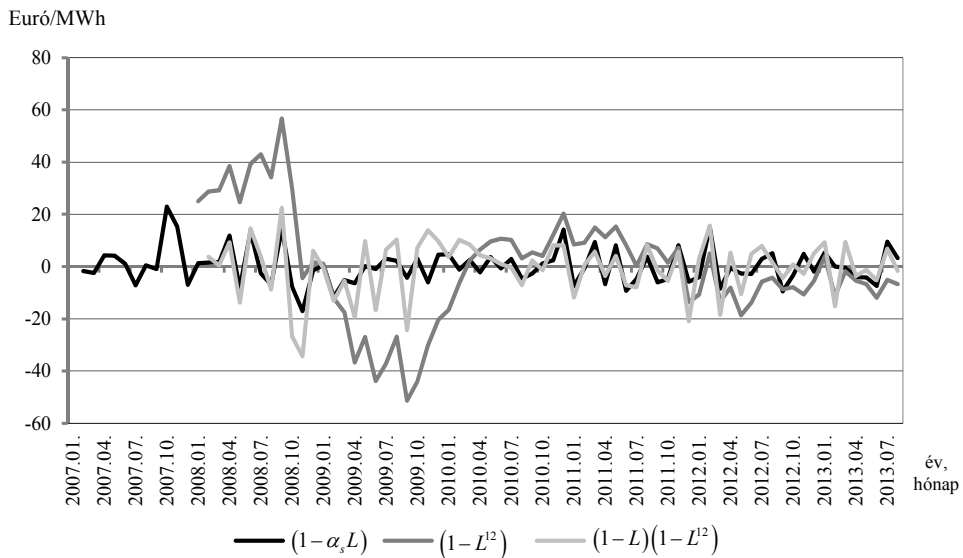
Bemutatjuk itt is a periodikusan integrált idősorokon a különböző differenciaszűrők alkalmazásával kapott eredmények ábráit, illetve a gördülő módszerrel kalkulált előrejelzéseket is.

Az EEX volumen, illetve az EEX árfolyamidősorokat vizsgálva látható, hogy ezek tartalmazznak olyan outlier, kiugró értékeket, szinteltolásokat, amelyeket egyik szűrő sem kezel. Ezeket érdemes ezért explicit módon beépíteni a modellekbe.

7. ábra. Különböző szűrők felhasználásával képzett differencia-idősorok az EEX Phelix day-ahead volumenidősoron

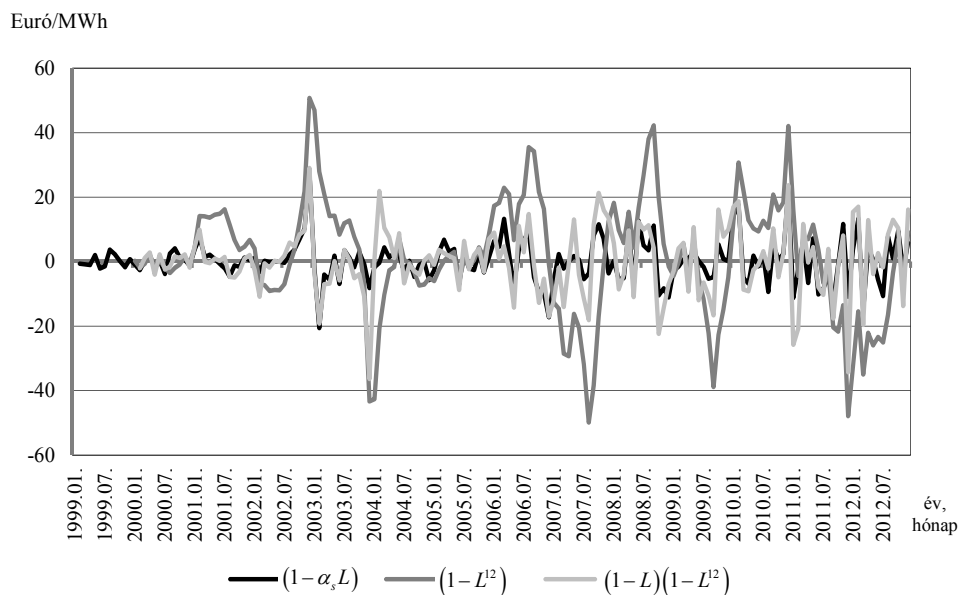


8. ábra. Különböző szűrők felhasználásával képzett differencia-idősorok az EEX Phelix day-ahead átlagárfolyam-idősoron



Szintén tanulságos a Nordpool árfolyam esetében tapasztalt eredmények vizsgálata. Itt az árfolyamnak a hosszú távú trendje „enyhébb”, viszont sokkal inkább jellemzik az idősort a vissza-visszatérő magas árfolyamszintek, amelyek csak egy-két hónapban vannak jelen. Itt különösen szemléletes – intuitíve is – a trend és a szezonális összekapcsolódása. Mivel ezek a komponensek sokszor erősítik, illetve gyengítik egymás hatását, így a szezonális differenciaszűrő alkalmazása esetén ezek az egy-két hónapos szinteltolódások a szezonális differenciaképzés után is megmaradnak. Az időrendi differenciaképzés természetesen eltünteti ezeket, mint ahogy általában a strukturális töréseket sok esetben – egyébként helytelenül – az idősor időrendi differenciájának a képzésével eltüntethetjük. Mindennek tudatában érdemes összevetni mindezt a szezonálisan változó differenciaszűrő alkalmazása során kapott eredményekkel.

9. ábra. Különböző szűrők felhasználásával képzett differencia-idősorok az Nordpool Elspot day-ahead átlagárfolyam-idősoron



A gördülő módszerrel kalkulált előrejelzések tekintetében a tapasztalat hasonló a TTF volumenidősor esetében kapott eredményekhez, azaz a periodikus szűrő alkalmazása mellett a mintán kívüli előrejelzési hibák jóval kisebbek. Megfigyelhető az is, hogy az előrejelzési hiba árfolyamidősorok esetében nagyobb, mint volumenidősorok esetében.

5. táblázat

Előrejelzések értékelése különböző szűrők alkalmazása mellett a tanulmányban vizsgált idősorok esetén

Idősor	Ablak hossza (hónap)	Előrejelzések száma (hónap)	Alkalmazott szűrő	Szűrt idősorra illesztett modell	RMSE (saját mértékegység)	MAPE (százalék)
TTF nominálás volumenidősor (havi)	84	12	Periodikus	–	345	6,3
			Szezonális	AR1	496	11,1
			Időbeli és szezonális	–	536	12,1
EEX Phelix day-ahead volumenidősor (havi)	72	8	Periodikus	–	1 171 468	3,3
			Szezonális	AR1	1 548 157	4,2
			Időbeli és szezonális	–	1 624 483	4,5
EEX Phelix day-ahead átlagárfolyam-idősor (havi)	72	8	Periodikus	–	4,51	9,7
			Szezonális	AR1	7,27	15,1
			Időbeli és szezonális	–	6,81	14,3
Nordpool Elspot day-ahead átlagárfolyam-idősor (havi)	156	12	Periodikus	–	8,33	24,3
			Szezonális	AR1	10,99	31,5
			Időbeli és szezonális	–	13,91	37,9

7. Konklúzió és további kutatási lehetőségek

A tanulmányban bemutattuk tehát, hogy hogyan lehetséges egységgyök meglétének tesztelése abban az esetben, amikor a trend és a szezonális egymástól nem függetlenek. Ezt az esetet, azaz amikor a trend növekedésével párhuzamosan a szezonális kilengések is nőnek, közismertebb nevén a komponensek multiplikatív, szorzatszerű összekapcsolódásaként azonosítjuk.

A tanulmányban bemutatott periodikusan integrált modell esetében kapott α_s együtthatók egyébként nem mások, mint az egységnyi értéktől a szezonális végett eltérő együtthatók. A szezonális alakulását jellemezve, ezek tartalmilag nagyon hasonlóak a gyakorlatban sokszor alkalmazott szezonindexekhez, valamint a trend és a szezonális multiplikatív összekapcsolódásából is logikusan adódik ez a párhuzam. Ez a hasonlóság azonban csak látszólagos és félrevezető, hiszen az autoregresszív struktúra végett a klasszikus szezonindexet itt nem találjuk meg,

ugyanis az α_s együtthatók nem a trendhez viszonyított átlagos relatív eltérést mutatják, hanem az idősor egy időszakkal korábbi értékéhez viszonyítottat. Mindezek mellett az α_s együtthatók felhasználásával, és a sokkok időbeli lefutásának vizsgálatával elemezhető a modellkeretben az is, hogy melyik szezonnak van a legerősebb hosszú távú hatása, illetve mely szezonokban gyűrűznek be a sokkok leginkább.

Az idősorokon bemutatott periodikus differenciaszűrő $(1 - \alpha_s L)$, amint azt láttuk, jól működik tehát abban az esetben, amikor a modell komponensei közötti multiplikatív kapcsolat indokolható. A periodikus differenciaszűrő hátránya ugyanakkor az értelmezés nehézségében rejlik, ugyanis nem az egymást követő vagy az egymástól a szezonálisnak megfelelő távolságra lévő megfigyelések differenciájáról van szó. Ebben az esetben ugyanis az $(1 - L)$ szűrő korrigálásra kerül a szezonális hatásának megfelelően. A szezonális hatása alatt itt pedig az egymást követő megfigyelések közötti, szezononként különböző relatív kapcsolat értendő. Érdemes még megjegyeznünk azt is, hogy az $(1 - \alpha_s L)$ szűrő felhasználásával az α_s együtthatón keresztül a szezonális, az L késleltetési operátoron keresztül pedig a (sztochasztikus) trendet egyszerre, egyetlen egy lépésben szűrjük. Az egymástól való függőség miatt azonban nem is tehetünk másként.

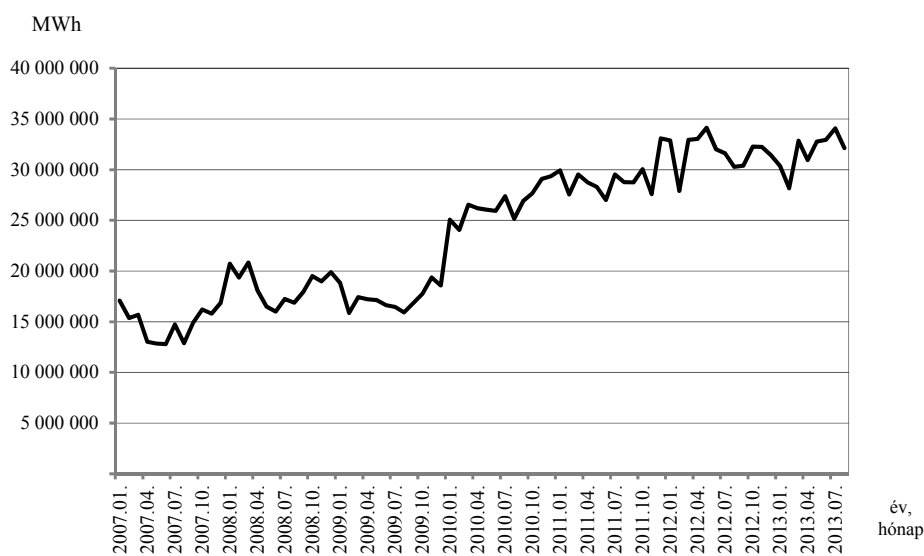
A gyakorlati alkalmazás tekintetében vannak olyan területek, amelyekre a tanulmányban nem tértünk ki. Ilyen többek között a periodikus autoregresszív modell alkalmazása *stacioner* idősorok esetén. Az alapötlet, azaz a szezononként változó időbeli függőség, természetesen változatlan.

Más oldalról, a periodikusan integrált modellt helyettesítendő vagy kiegészítendő, jogosan merül fel az ötlet elemzések elvégzésére a logaritmált idősorokon. Közismert, hogy amikor az idősor heteroszkedasztikus, a *logaritmálás* jó eszköz lehet a szórás „kiegyenlítésére”, használata a mi esetünkben a multiplikatív kapcsolat feltételezése végett indokolható. A részletes számítási eredményeket nem közöljük, de röviden elmondható, hogy a logaritmálás nem változtat lényegesen a tanulmányban bemutatott eredményeken, így a periodikusan integrált modell a preferált minden esetben, illetve az előrejelzések pontossága sem változik jelentős mértékben.

Függelék

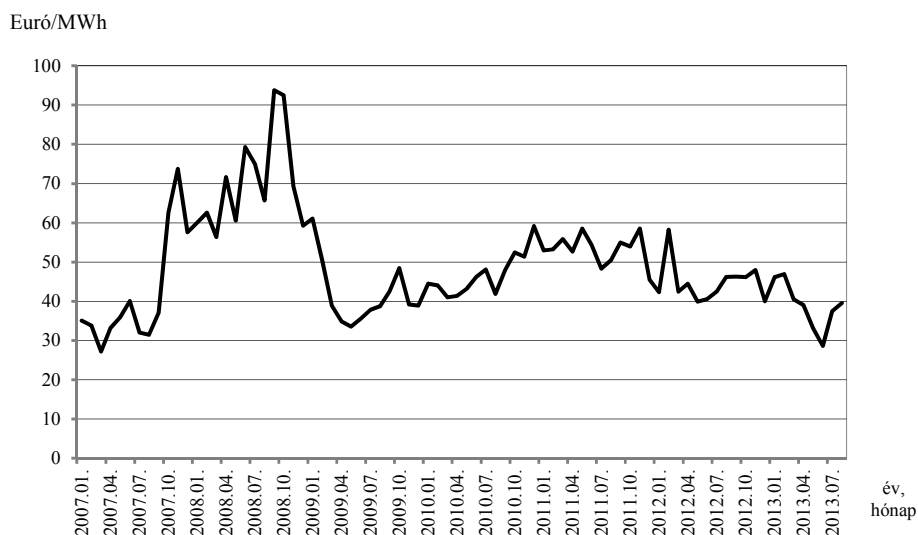
1. A tanulmányban vizsgált további idősorok ábrái

F1. ábra. EEX Phelix day-ahead havi volumenidősor

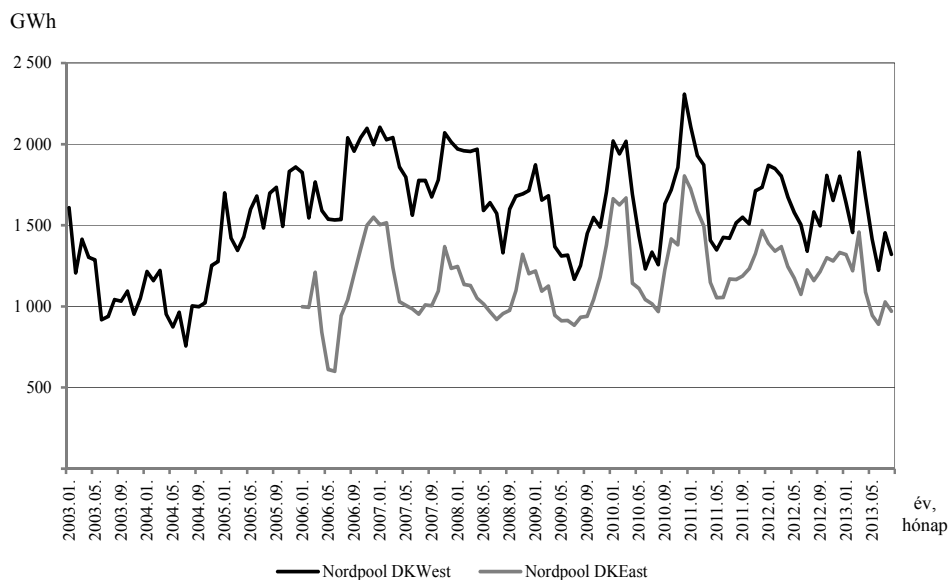


Forrás: Itt és az F2. ábránál www.eex.com (Regionális Energiagazdasági Kutatóközpont).

F2. ábra. EEX Phelix day-ahead havi átlagárfolyam-idősor

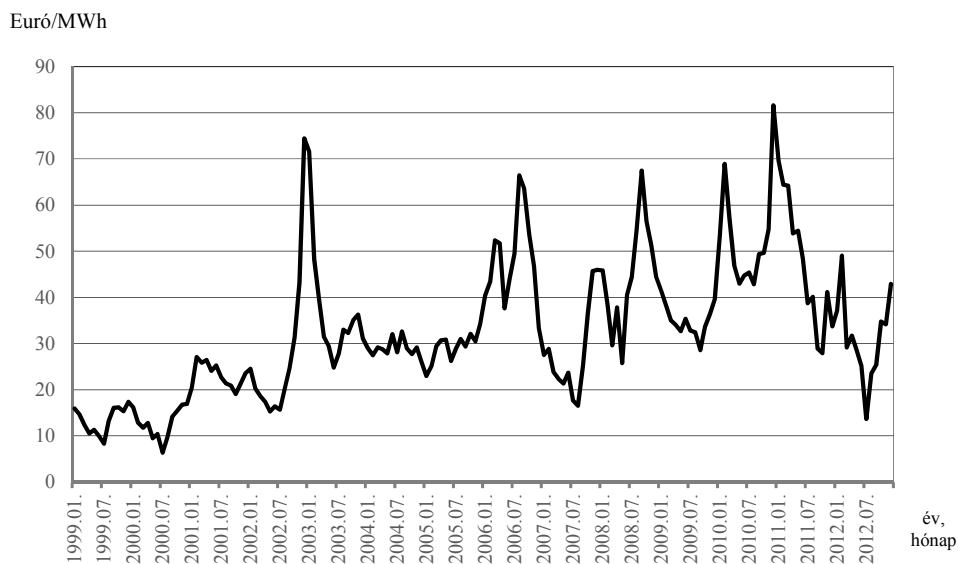


F3. ábra. A Nordpool nyugati és keleti dán régióinak havi volumenidősorai



Forrás: www.energinet.dk (Regionális Energiagazdasági Kutatóközpont).

F4. ábra. Nordpool Elspot day-ahead átlagárfolyam-idősor



Forrás: www.nordpoolspot.com (Regionális Energiagazdasági Kutatóközpont).

2. Számítási részeredmények

2.1. PAR(P) modellszelekció a késleltetési rend meghatározására (TTF volumenidősor)

F1. táblázat

PAR(p) modellszelekció a késleltetési rend meghatározására

Szelekciós kritérium	PAR(1)	PAR(2)
F-statisztika (p-érték)	0,7747	0,5198
R ² _{adj}	0,9897	0,9894
AIC	4 148,943	4 120,367
BIC	4 185,274	4 187,841

Forrás: Itt és a további táblázatoknál saját számítás (R).

2.2. A becült PIAR-modell részeredményei (TTF volumenidősor)

F2. táblázat

A becült PIAR modell paramétereinek tesztelése

	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4	s = 5	s = 6	s = 7	s = 8	s = 9	s = 10	s = 11	s = 12
α_s	1,144	0,935	0,895	0,752	0,944	0,878	0,958	1,051	0,945	1,399	1,097	1,148
Standard hiba (α_s)	0,019	0,017	0,017	0,016	0,020	0,021	0,026	0,025	0,025	0,024	0,021	–
t-próba ($H_0: \alpha_s = 0$)	60,21	55,00	52,65	47,00	47,20	41,81	36,85	42,04	37,80	58,29	52,24	–
p-érték ($H_0: \alpha_s = 0$)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	–

2.3. A sokkok hosszú távú hatása (TTF volumenidősor)

F3. táblázat

A sokkok szezonfüggő hosszú távú hatása

1,000	1,069	1,194	1,588	1,682	1,916	2,001	1,904	2,014	1,440	1,313	1,144	18,265
0,935	1,000	1,117	1,484	1,573	1,792	1,871	1,780	1,883	1,346	1,227	1,069	17,077
0,837	0,895	1,000	1,329	1,408	1,604	1,675	1,594	1,686	1,205	1,099	0,957	15,289
0,630	0,674	0,752	1,000	1,060	1,207	1,260	1,199	1,269	0,907	0,827	0,720	11,505
0,595	0,636	0,710	0,944	1,000	1,139	1,189	1,132	1,197	0,856	0,780	0,680	10,858
0,522	0,558	0,623	0,828	0,878	1,000	1,044	0,993	1,051	0,751	0,685	0,597	9,530
0,500	0,535	0,597	0,793	0,841	0,958	1,000	0,951	1,007	0,720	0,656	0,572	9,130
0,525	0,562	0,627	0,834	0,884	1,007	1,051	1,000	1,058	0,756	0,690	0,601	9,595
0,497	0,531	0,593	0,788	0,835	0,952	0,994	0,945	1,000	0,715	0,652	0,568	9,070
0,695	0,743	0,830	1,103	1,168	1,331	1,390	1,322	1,399	1,000	0,912	0,794	12,687
0,762	0,815	0,910	1,209	1,281	1,460	1,524	1,450	1,534	1,097	1,000	0,871	13,913
0,874	0,935	1,044	1,388	1,471	1,676	1,750	1,664	1,761	1,259	1,148	1,000	15,970
8,372	8,953	9,997	13,288	14,081	16,042	16,749	15,934	16,859	12,052	10,989	9,573	–

A táblázat néhány eleme a következőképpen kalkulálható (vastag betűvel kiemelt értékek):

$$\begin{aligned}
 &1,144 - \text{decemberben érkező sokk hatása januárra: } 1,144 (\alpha_{12}); \\
 &1,069 - \text{decemberben érkező sokk hatása februárra: } 1,144 \cdot 0,935 (\alpha_{12} \cdot \alpha_1); \\
 &0,957 - \text{decemberben érkező sokk hatása márciusra: } 1,144 \cdot 0,935 \cdot 0,895 \\
 &(\alpha_{12} \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2); \\
 &1,099 - \text{novemberben érkező sokk hatása márciusra: } 1,148 \cdot 1,144 \cdot 0,935 \cdot \\
 &\cdot 0,895 (\alpha_{11} \cdot \alpha_{12} \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2).
 \end{aligned}$$

Az eredmények azonosak a megfelelő autoregresszív együtthatók szorzatával, hiszen a modell csak egy késleltetést tartalmaz.

Irodalom

- BOSWIJK, H. P. – FRANCES, P. H. [1995]: Testing for Periodic Integration. *Economics Letters*. No. 48. pp. 241–248.
- BOSWIJK, H. P. – FRANCES, P. H. [1996]: Unit Roots in Periodic Autorregressions. *Journal of Time Series Analysis*. No. 17. pp. 221–245.
- BOX, G. E. P. – JENKINS, G. M. [1970]: *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden Day. San Francisco.
- BURGER, M. – KLAR, B. – MÜLLER, A. – SCHINDLMAYR, G. [2004]: A Spot Market Model for Pricing Derivatives in Electricity Markets. *Journal of Quantitative Finance*. Vol. 4. No. 1. pp. 109–122.
- CLEMENTS, M. P. – HENDRY, D. F. [1997]: An Empirical Study of Seasonal Unit Roots in Forecasting. *International Journal of Forecasting*. Vol. 13. No. 3. pp. 341–355.
- DARBAR, M. S. – DEB, P. [1995]: Does Trading Volume Have a Unit Root? *Applied Economics Letters*. Vol. 2. No. 5. pp. 144–147.
- FRANCES, P. H. [1996]: *Periodicity and Stochastic Trends In Economic Time Series*. Oxford University Press. Oxford.
- FRANCES, P. H. [1998]: *Time Series Models for Business and Economic Forecasting*. Cambridge University Press. Cambridge.
- FRANCES, P. H. – PAAP, R. [1996]: Periodic Integration: Further Results on Model Selection and Forecasting. *Statistical Papers*. No. 37. pp. 33–52.
- FULLER, W. A. [1976]: *Introduction to Statistical Time Series*. Wiley. New York.
- GRANGER, C. W. J. – NEWBOLD, P. [1986]: *Forecasting Economic Time Series*. Academic Press. Orlando.
- HAMILTON, J. D. [1994]: *Time Series Analysis*. Princeton University Press. Princeton.
- HEATHER, P. [2012]: *Continental European Gas Hubs: Are They Fit for Purpose?* Oxford Institute for Energy Studies. Oxford.
- HYLLEBERG, S. – ENGLE, R. F. – GRANGER, C. W. J. – YOO, B. S. [1990]: Seasonal Integration and Cointegration. *Journal of Econometrics*. No. 44. pp. 215–238.
- LIÉLI R. [1999]: *Az időszormodelleken alapuló inflációs előrejelzések: egyváltozós módszerek*. MNB Füzetek. 4. sz. Magyar Nemzeti Bank. Budapest.

- LOBATO, I. N. – VELASCO, C. [2000]: Long Memory in Stock-Market Trading Volume. *Journal of Business and Economic Statistics*. Vol. 18. No. 4. pp. 410–427.
- MÁK F. [2011]: Egységgyöktesztek alkalmazása strukturális törések mellett a hazai benzinár példáján. *Statisztikai Szemle*. 89. évf. 5. sz. 545–573. old.
- MAROSSY Z. [2010]: *A spot villamosenergia-árak elemzése statisztikai és ökonofizikai eszközökkel*. PhD-értekezés. Budapesti Corvinus Egyetem. Budapest.
- OSTERWALD-LENUM, M. [1992]: A Note with Quantiles of the Asymptotic Distribution of the Maximum Likelihood Cointegration Rank Test Statistics: Four Cases. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. Vol. 54. No. 3. pp. 461–472.
- SUGÁR A. [1999a]: Szezonális kiigazítási eljárások (I.). *Statisztikai Szemle*. 77. évf. 9. sz. 705–721. old.
- SUGÁR A. [1999b]: Szezonális kiigazítási eljárások (II.). *Statisztikai Szemle*. 77. évf. 10–11. sz. 816–832. old.

Summary

Modelling of long- and short-term seasonality is an interesting field. The choice between deterministic and stochastic modelling of trends and seasonality and their implications are as relevant as making difference between deterministic and stochastic trends itself. The study addresses a special case when the stochastic trend and seasonality are not independent and the usual differencing filters do not apply. The results are presented for (power and natural gas) day-ahead (spot) trading data of some main European energy exchanges.