Statisztikai Szemle

Közzététel: 2019. augusztus 2.

A tanulmány címe:

Kockázati mértékek becslésének igazolása

Szerző:

Bugár Gyöngyi, a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Karának egyetemi docense;
E-mail: bugar@ktk.pte.hu

DOI: https://doi.org/10.20311/stat2019.8.hu0731

Kockázati mértékek becslésének igazolása*

Bugár Gyöngyi,
a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Karának egyetemi docense
E-mail: bugar@ktk.pte.hu

A kockázat előrejelzésére használt modellek ellenőrzésének – kockázatmérésben alkalmazott szóhasználattal: a becsült kockázat visszatesztelésének – nagy jelentősége van a bankok tevékenységének nemzetközi szabályozásában. A tanulmány célja annak a kockázatmenedzsment területén új keletű megközelítésnek és az abból származó következtetéseknek a bemutatása, amely az említett problémát a statisztikai előrejelzésben alkalmazott módszertanra igyekszik visszavezetni. Ebben kulcsfontosságú szerepet játszik a kockázatot becslő függvény egy tulajdonsága, amelyre jelenleg nem létezik megfelelő fogalom a magyar szakirodalomban. Így a tanulmány szerzője az angol *elicitability*[1] szakkifejezés magyar megfelelőjének (***elicitálhatóság***) bevezetésére vállalkozik. Emellett kísérletet tesz a várható érték fogalmát általánosító *expectile*[2] szó *expektilis*ként történő honosítására is. Az utóbbi terminust még szintén nem vette át a hazai szakirodalom. A tanulmány hangsúlyt fektet annak megvilágítására, hogy mi az elicitálhatóság jelentősége a kockázat előrejelzésének megítélésében, a különféle kockázat-előrejelző modellek közötti választás elősegítésében. Kitér arra is, hogy miként hatott ez a banki tevékenység bázeli szabályozására.

TÁRGYSZÓ:
Piaci kockázat.
Optimális becslés.
Bázeli szabályozás.

DOI: 10.20311/stat2019.8.hu0731

* A kutatást az Innovációs és Technológiai Minisztérium TUDFO/47138/2019-ITM számú döntése alapján a 2019. évi Felsőoktatási Intézményi Kiválósági Program finanszírozta a Pécsi Tudományegyetem 4. tématerületi programja keretében.

[1] A szó az *elicit* igéből származik, amelynek jelentése: kiderít, kiszed, tisztáz.

[2] A kifejezés az *expect* igéből ered. Ennek jelentése: elvár, számít valamire, valószínűnek tart.

A gazdasági életben gyakran előfordul, hogy valamilyen makrogazdasági vagy pénzügyi változó jövőbeli értékét – például a jövő évi GDP-t vagy egy részvény következő héten esedékes hozamát – kell megbecsülni. E folyamatnak szerves része, hogy megnyugtató képet kapjunk az előrejelzés pontosságáról. Emiatt nagy jelentősége van a becslés igazolásának, azaz a becsült érték valósággal történő egybevetésének.

Amikor például annak „jóslására" vállalkozunk, hogy másnap esik-e az eső, vagy egy futballmérkőzés eredménye miképp alakul, a következő napi „eredmény" birtokában az előrejelzés sikere könnyen megítélhető. Bonyolultabb a helyzet, ha egy részvény jövő héten esedékes hozamát szeretnénk megbecsülni. Tekintve, hogy a hozam ismeretlen jövőbeli eloszlással rendelkező valószínűségi változó, először is döntenünk kell arról, hogy „hozam" címén az említett valószínűségeloszlás melyik mutatójának megragadására törekedjünk. Jellemezhető például a várható értékkel vagy a mediánnal. Egy másik fontos kihívás, hogy a következő hetekben megvalósult (realizált) hozamok birtokában miként értékeljük az előrejelzés hatékonyságát.

A statisztikában különféle előrejelzési módszerek összehasonlítása és teljesítményének értékelése rendszerint egy hibafüggvény segítségével történik, amely az előre jelezni kívánt változó pontbecsült és valóságban megfigyelt értékeinek eltérését számszerűsíti a vizsgált periódusra. Két gyakran használt hibafüggvény a négyzetes és az abszolút hiba.

Gneiting [2011] felhívja a figyelmet arra, hogy amennyiben a becslőfüggvényhez „nem illeszkedő" hibafüggvényt választunk, a becslés pontosságának megítélésében téves következtetésre juthatunk. Véleménye szerint egy jövőbeli mennyiség hatékony előrejelzése két módon lehetséges. Az egyik, hogy először megadjuk az alkalmazni kívánt hibafüggvényt, majd ehhez keressük a becsülni kívánt valószínűségi változó azon statisztikáját, azaz becslőfüggvényét, amelynek esetében – adott szubjektív vagy objektív valószínűség-eloszlást feltételezve – az alkalmazott becslőfüggvény *optimális becslést* szolgáltat abban az értelemben, hogy egyértelmű *minimuma a hibafüggvény várható értékének*.[3] A másik lehetőség, hogy az alkalmazni kívánt becslőfüggvényből indulunk ki, és ehhez egy vele konzisztens[4] hibafüggvényt választunk a becslés pontosságának megítélésére.

[3] Erre Bayes-szabályként szokás hivatkozni.
[4] A konzisztencia pontos, formális megfogalmazását lásd a 2. fejezetben.

A banki gyakorlatban, a piaci kockázat előrejelzése esetében az előbb említett második esettel állunk szemben. Az alapprobléma annak eldöntése, hogy a kockázat következő periódus(ok)ra, különféle becslési módszerekkel előállított értékei közül melyik a legjobb.

A megfelelő kockázati mérték megválasztása kritikus szerepet játszik a gyakorlatban, mert a bankok által képzendő tőketartalék meghatározása ezen alapul. A *piaci kockázat* az *árfolyam- és kamatmozgásokból eredő veszteségek* bekövetkezését jelenti. A kockázatnak ez a típusa a befektetési tevékenységhez kötődik, így a bankok *kereskedési könyv*ében szereplő pozíciókat érinti. 2016 januárjában gyökeres változás következett be a bázeli szabályozásban: a kereskedési könyvben szereplő, piaci kockázatnak kitett pozíciók után képzendő szabályozói tőkekövetelmény megállapításánál a VaR (value-at-risk – kockáztatott érték) helyett az ES (expected shortfall – várható többletveszteség)[5] alkalmazását írták elő az ún. belső modellt használó bankok számára (*BCBS* [2016]). Ezzel mintegy elismerést nyert az a sok erőfeszítés, amellyel az akadémiai szféra a kockázati mértékek kutatásához hozzájárult. Az ehhez fűződő „euforikus” képet nagymértékben beárnyékolja az ES visszateszteléséhez fűződő bizonytalanság. A szabályozás ezt úgy igyekezett áthidalni, hogy a belső kockázatértékelő modell validitásának ellenőrzésére továbbra is a VaR alkalmazását írja elő.

A tanulmány célja annak – az elicitálhatóság fogalmára épülő – statisztikai módszertannak – a kockázatelméleti kontextusban történő – bemutatása, amely lehetővé teszi egy kockázati mérték becslésének elméletileg korrekt, gyakorlati szempontból pedig egyszerű és hatékony igazolását. A kockázati mértékektől elvárható egyéb sajátosságok ismertetésén keresztül betekintést nyújtunk abba a dilemmába is, amely a VaR és az ES közötti választást nehezíti. Ez nem pusztán a pénzügyi matematika, illetve a statisztika „híveinek” elméleti szintű egymásnak feszülését, konfliktusát testesíti meg, hanem a pénz- és tőkepiacok gyakorlati szabályozásának nehézségeit is érzékelteti.

Tanulmányunk a következőképpen épül fel: az 1. fejezetben ismertetjük a veszteségeloszláson alapuló kockázati mérőszámok fogalmát, és bemutatjuk az általunk vizsgált három mérőszámot. Ezt a 2. fejezetben az elicitálhatóság formális meghatározása követi, különös hangsúlyt fektetve annak magyarázatára, hogy mi ennek a tulajdonságnak a szerepe és jelentősége a kockázat becslésének megítélésében. A 3. fejezet a koherens kockázati mértékeket leíró tulajdonságok bemutatásával foglalkozik, és áttekinti ezeknek az elicitálhatósággal való kapcsolatát. A tanulmányt a 4. fejezetben összegzéssel és néhány fontos következtetés megfogalmazásával zárjuk.

[5] A két kockázati mérték pontos meghatározását lásd az 1. fejezetben.

1. Veszteségeloszláson alapuló kockázati mérőszámok

A pénzügyi kockázat mérésére három alapvető megközelítés terjedt el a szakirodalomban (*McNeil–Frey–Embrechts* [2015]): a névértéken alapuló, a veszteségeloszlásra épülő, valamint a szcenárióalapú.[6]

Közülük a legrégebbi, névértéken alapuló megközelítés egy portfólió kockázatát a benne szereplő értékpapírok névértékére vezeti vissza oly módon, hogy az egyes névértékeket az adott értékpapír kockázati besorolásának megfelelő faktorral szorozza. Az így súlyozott névértékek összege méri a portfólió teljes kockázatát. Ez a megközelítés köszön vissza a bázeli szabályozás standard módszerében (*Bugár* [2015]).

A kockázat mérésének legmodernebb változatát megtestesítő módszertan egy portfólió kockázatát olyan statisztikai mérőszámmal azonosítja, amely a portfólió előre meghatározott időhorizontra vonatkozó veszteségeloszlásán alapul. Erre a megközelítésre példaként említhető a *Markowitz* [1991] által alkalmazott variancia, a VaR vagy az ES.

A szcenárióalapú megközelítés esetében az egyes kockázati faktorok lehetséges jövőbeli változásaira építve különféle jövőbeli állapotokat, szcenáriókat generálunk, és a belőlük származó veszteségeket becsüljük. A portfólió kockázatát a lehetséges szcenáriókon előforduló legmagasabb veszteségnek megfelelően ítéljük meg.

Jelen tanulmányban három veszteségeloszláson alapuló kockázati mértéket veszünk górcső alá, elsősorban abból a szempontból, hogy hatékony előrejelzésük mennyiben lehetséges.

1.1. Kockáztatott érték

A VaR az 1970-es évek végén jelent meg a világ jelentősebb pénzügyi intézményeinek (multinacionális bankok) kockázat-előrejelző modelljeiben. Említésre méltó, hogy a mérőszám alkalmazása valójában sokkal korábbról eredeztethető: az aktuáriusok már a huszadik század elején használták a belső tartalékok becslésére.

A VaR kvantilis alapú kockázati mérték (*Dowd–Blake* [2006]), azaz adott α megbízhatósági szinthez tartozóan a veszteségeloszlás α-kvantilise:

$$P\left(L \leq VaR_{\alpha}\right) = F\left(VaR_{\alpha}\right) = \alpha \,, \qquad /1/$$

[6] A kockázati mérőszámok más jellegű csoportosításával kapcsolatban lásd *Albrecht* [2004], valamint *Bugár–Uzsoki* [2006].

amelyből

$$VaR_{\alpha}(L) = \bar{F}(\alpha),\ 0 < \alpha < 1\,. \qquad /2/$$

Az $\bar{F}(\alpha)$ a veszteséget jelentő valószínűségi változó (L) $F(x)$ eloszlásfüggvényének általánosított inverze (lásd *Embrechts–Resnick–Samorodnitsky* [1999]), azaz:

$$\bar{F}(\alpha) = \inf\left\{x \in \mathbb{R} \middle| F(x) \geq \alpha\right\}, \qquad /3/$$

ahol inf a zárójelben szereplő számhalmaz legnagyobb alsó korlátját (infimumát) jelenti.

A bázeli székhelyű Nemzetközi Fizetések Bankja által létrehozott BCBS (Basel Committee on Banking Supervision – Bázeli Bankfelügyeleti Bizottság) ajánlások egész sorát dolgozta ki a bankok számára a piaci kockázatokkal szembeni védekezésre. A bankok kereskedési könyveiben szereplő, piaci kockázatnak kitett pozíciók kockázatának meghatározására 1993-tól kezdődően a VaR-t javasolta. Említésre méltó, hogy a VaR alkalmazásával kapcsolatos kétségeiket már a 2000-es évek elejétől kezdődően megfogalmazták a kutatók és a kockázati szakértők. Egy sor olyan tanulmány jelent meg, amely rámutatott a vele kapcsolatos problémákra, sőt mi több, a „*Journal of Banking and Finance*” című rangos pénzügyi folyóirat 2002-ben külön kötetet szentelt a kockázatkezelés területén előforduló statisztikai és mérési problémáknak. *Szegö* [2002] a kötetben megjelent tanulmányokat bemutató szerkesztői előszavának a „Soha többé VaR (ez nem sajtóhiba)” provokáló címet adta. A figyelmeztető jelzéseket azonban a bankok szabályozásáért felelős döntéshozók a 2008-as pénzügyi válság bekövetkezéséig nem igazán vették komolyan.

1.2. Várható többletveszteség

A mérőszám, amely számos más, például CVaR (conditional value-at-risk – feltételes kockáztatott érték) néven is ismert, végül is ES elnevezéssel kapott helyet a bázeli szabályozásban.[7] A magyar szakirodalomban várható többletveszteség néven lelhető fel (*Bugár–Ratting* [2016]), ezzel a kockáztatott értéket, azaz a VaR-t meghaladó átlagos veszteséget hivatott kifejezni.

[7] Lásd bővebben: *Rockafellar–Uryasev* [2000] és *BCBS* [2016].

Meghatározott α megbízhatósági szinthez tartozóan ES a VaR-t meghaladó veszteségek várható értéke:

$$ES_\alpha\left(L\right) = E\left(L \middle| L > VaR_\alpha\right). \qquad /4/$$

Folytonos veszteségeloszlásra /4/ a következő alakot ölti (*Embrechts* [2014]):

$$ES_\alpha\left(L\right) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_x\left(L\right)dx. \qquad /5/$$

1.3. „Veszteségexpektilis"

Az *expectile* fogalma, amely a várható érték általánosításának is tekinthető, *Newey* és *Powell* [1987] tanulmányában jelent meg először az angol szakirodalomban. Lévén, hogy magyar megfelelője után kutatva nem találtunk létező elnevezést, jelen tanulmányban *expektilis* néven történő bevezetése mellett döntöttünk.[8]

Legyen az L veszteség véges várható értékkel rendelkező valószínűségi változó, $\alpha \in \left(0,\ 1\right)$ pedig a választott konfidenciaszint. Ekkor azt az x értéket, amely az

$$\alpha E\left(\left(L-x\right)^+\right) = \left(1-\alpha\right)E\left(\left(L-x\right)^-\right) \qquad /6/$$

egyenlet egyértelmű megoldása, az L valószínűségi változó α-expektilisének nevezzük.[9] Az előbbiekben:

$$y^+ = \max\left(y,\ 0\right) \text{ és } y^- = \max\left(-y,\ 0\right).$$

Könnyen belátható, hogy $\alpha = 0{,}5$ esetén a /6/ összefüggés a várható veszteséget szolgáltatja, azaz $e_{0,5}\left(L\right) = E\left(L\right)$. Ha $\alpha = 0{,}5$, akkor $E\left(\left(L-x\right)^+\right) = E\left(\left(L-x\right)^-\right)$, így $E\left(\left(L-x\right)^+ - \left(L-x\right)^-\right) = 0$, amiből pedig $x = E\left(L\right)$.

[8] Választásunkat az indokolja, hogy az *expectile* szóhoz nyelvészeti szempontból hasonló angol *quantile* fogalom *kvantilis* formában már elfogadottá vált a magyar szakirodalomban (a Google több mint 20 ezer találatot ad ki az utóbbi fogalomra).

[9] Az expektilis fogalmát *McNeil–Frey–Embrechts* [2015] definícióját alapul véve határoztuk meg, mert véleményünk szerint ez a legegyszerűbb megközelítés. A másik lehetséges meghatározást és az expektilis kockázati mértékként történő alkalmazásának – a tanulmányban nem tárgyalt – egyéb fontos részleteit illetően lásd *Anderson* [2012] tanulmányát.

2. Az elicitálhatóság meghatározása és szerepe a kockázat megítélésében

Az angol szakirodalomban 2008-ban jelent meg először a fogalom *elicitability* néven, *Lambert–Pennock–Shohami* [2008] tanulmányában. Magyar nyelvű szakkifejezés hiányában, *elicitálhatóság*ként történő megnevezését javasoljuk.

Legyen $R: L \to R(L)$ egy veszteségalapú kockázati mérték. Ez egy olyan függvénykapcsolatként értelmezhető, amelynek független változója a veszteség mint valószínűségi változó. *R* úgy is tekinthető, mint az *L* veszteség F_L eloszlásfüggvényén értelmezett *T* becslőfüggvény, amelyre $T: F_L \to T(F_L)$. Az *R* és *T* közötti kapcsolat nyilvánvalóan: $R(L) = T(F_L)$. Mint a VaR esetében láttuk: $VaR_\alpha(L) = \bar{F}_L(\alpha)$, az említett becslőfüggvény – α konfidenciaszinthez tartozóan – az F_L eloszlásfüggvény általánosított inverze.

Az elicitálható becslőfüggvények azzal a sajátossággal rendelkeznek, hogy található hozzájuk olyan hibafüggvény, amely várható értékének minimumhelyeként előállíthatók. Mint ismeretes, a hibafüggvény az előre jelzett és a realizált érték közötti eltérést számszerűsíti. A következő két alfejezetben a hibafüggvény és az elicitálhatóság formális leírásával foglalkozunk. Mind a fogalmak definiálásában, mind pedig a megfogalmazott állítások bizonyításában *McNeil–Frey–Embrechts* [2015] gondolatmenetére támaszkodunk.

2.1. A hibafüggvény és az elicitálhatóság formális meghatározása

Egy kétváltozós $S: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ függvényt *hibafüggvény*nek nevezünk, ha bármely $x,\ l \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következők:

1. $S(x,\ l) \geq 0$ és $S(x,\ l) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 1$.

2. $S(x,\ l)$ monoton növekvő $x > l$ esetén, $x < l$ esetén pedig monoton csökkenő.

3. $S(x,\ l)$ folytonos függvénye *x*-nek.

Egy T becslőfüggvényt *elicitálható*nak nevezünk, ha létezik hozzá olyan S hibafüggvény, amelyre teljesülnek a következők:

1. minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\int_{\mathbb{R}} S(x,\, l)\, dF(l) < \infty$,

2. $T(F) = \arg\min_{x\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} S(x,\, l)\, dF(l)$.

Az előbbiek közül az első tulajdonság azt fogalmazza meg, hogy a hibafüggvény várható értéke véges, a második pedig azt, hogy az alkalmazott becslőfüggvény *optimális becslés*t szolgáltat abban az értelemben, hogy egyértelmű minimuma a hibafüggvény várható értékének. Amennyiben egy S hibafüggvényre az előbbi két tulajdonság teljesül, akkor azt mondjuk, hogy *szigorúan konzisztens* a T becslőfüggvényre nézve. Ezt figyelembe véve úgy is fogalmazhatunk, hogy egy becslőfüggvény elicitálható, ha létezik hozzá olyan szigorúan konzisztens hibafüggvény, amelyre nézve a becslőfüggvény optimális becslést szolgáltat, azaz egyértelmű minimuma a hibafüggvény várható értékének.

2.2. A VaR és a veszteségexpektilis mint elicitálható kockázati mértékek

Az előbbiekben leírtakat kockázatelméleti kontextusba helyezve: ha az L veszteség F_L eloszlásfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változó, akkor egy elicitálható kockázati mérőszám az

$$E\Big(S(x,\, L)\Big) = \int_{\mathbb{R}} S(x,\, l)\, dF_L(l) \qquad /7/$$

függvény minimumhelye az x változóra nézve.

A továbbiakban belátjuk, hogy a VaR és a veszteségexpektilis kockázati mérőszámok elicitálhatók.

Állítás: Bármely $0 < \alpha < 1$ esetén a $VaR_\alpha = \bar{F}_L(\alpha)$ kockázati mérték elicitálható a szigorúan monoton növekvő, véges várható értékkel rendelkező eloszlásfüggvények halmazán.

L valószínűségi változóra a VaR_α -val szigorúan konzisztens hibafüggvény:

$$S_\alpha(x,\, l) = \left|1_{\{l \le x\}} - \alpha\right| \left|l - x\right|. \qquad /8/$$

Bizonyítás:[10] Az F_L eloszlásfüggvénnyel rendelkező hibafüggvény várható értéke, $E\left(S_\alpha\left(x,\, l\right)\right)$ minden olyan pontban folytonosan differenciálható, ahol F_L folytonos. A lehetséges szélsőértékeket az x szerinti elsőrendű derivált zérushelye adja:

$$\frac{dE\left(S_\alpha\left(x,\, l\right)\right)}{dx} = \frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|1_{\{y \le x\}} - \alpha\right|\left|y - x\right| dF_L\left(y\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\left(1-\alpha\right)\left(x-y\right)dF_L\left(y\right) + \frac{d}{dx}\int_{x}^{+\infty}\alpha\left(y-x\right)\, dF_L\left(y\right) =$$

$$= \left(1-\alpha\right)\int_{-\infty}^{x} dF_L\left(y\right) - \alpha\int_{x}^{+\infty} dF_L\left(y\right) =$$

$$= \left(1-\alpha\right)\left[F_L\left(x\right) - 0\right] - \alpha\left[1 - F_L\left(x\right)\right] = F_L\left(x\right) - \alpha\, .$$

A továbbiakban két eset lehetséges:

> *1.* Létezik olyan x érték, amelyre $F_L\left(x\right) = \alpha$. Ekkor $x = \bar{F}_L\left(\alpha\right)$ egyértelmű minimumhelye az $E\left(S_\alpha\left(x,\, L\right)\right)$ függvénynek (a minimum létezésének elégséges feltétele az eloszlásfüggvény szigorú monoton növekedése miatt teljesül).
>
> *2.* Nincs olyan x érték, amelyre $F_L\left(x\right) = \alpha$ teljesül. Ekkor az F_L eloszlásfüggvénynek szakadása van az x helyen. Ekkor $F_L\left(y\right) - \alpha < 0$, ha $y < x$ és $F_L\left(y\right) - \alpha > 0$, ha $y > x$. Ebből ismét az következik, hogy $x = \bar{F}_L\left(\alpha\right)$ egyértelmű minimumhelye az $E\left(S_\alpha\left(x,\, L\right)\right)$ függvénynek.

Állítás: Bármely $0 < \alpha < 1$ esetén az α-expektilis $\left(e_\alpha\right)$ kockázati mérték elicitálható bármely véges varianciával rendelkező eloszlásfüggvény esetén. Az e_α-val szigorúan konzisztens hibafüggvény:

$$S_\alpha\left(x,\, l\right) = \left|1_{\{l \le x\}} - \alpha\right|\left(l - x\right)^2 . \qquad /9/$$

[10] *McNeil–Frey–Embrechts* [2015] alapján.

Bizonyítás:[11] Tekintsük a hibafüggvény várható értékének x szerinti deriváltját:

$$\frac{dE\left(S_\alpha\left(x,\, l\right)\right)}{dx}=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|1_{\{y\le x\}}-\alpha\right|\left(x-y\right)^2 dF_L\left(y\right)=$$

$$=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{y}\left(1-\alpha\right)\left(x-y\right)^2 dF_L\left(y\right)+\frac{d}{dx}\int_{y}^{+\infty}\alpha\left(x-y\right)^2 dF_L\left(y\right)=$$

$$=2\left(1-\alpha\right)\int_{-\infty}^{x}\left(x-y\right)dF_L\left(y\right)+2\alpha\int_{x}^{+\infty}\left(x-y\right)dF_L\left(y\right)=$$

$$=2\left(1-\alpha\right)E\left(\left(L-x\right)^-\right)-2\alpha\,E\left(\left(L-x\right)^+\right).$$

A kifejezés zérushelye pontosan az α-expektilist definiáló /6/ összefüggést adja, ami azt jelenti, hogy az α-expektilis az egyetlen lehetséges szélsőértékhely.

2.3. Az elicitálhatóság gyakorlati jelentősége

Egy kockázatmérő modell alkalmazhatóságával kapcsolatos természetes elvárás a felügyelő hatóság (bankfelügyelet) részéről a modell megbízhatóságának ellenőrizhetősége. Ez a modell verifikálhatóságát, pénzügyi szóhasználattal, visszatesztelhetőségét testesíti meg.

Amennyiben rendelkezünk egy elicitálható R kockázati mérték előre jelzett (becsült) $\hat{R}_t$ értékeivel a $t=1,\ 2,\ \ldots,\ m$ időpontokra vonatkozóan, és L_{t+1} a $t+1$ időpontban realizált veszteség, akkor az előre jelzett értékek visszatesztelése az adott kockázati mértékkel konzisztens $S\left(x,\ l\right)$ hibafüggvény egyes időpontokra vonatkozó értékeinek az összegzésével történhet:[12]

$$\sum_{t=1}^{m} S(\hat{R}_t,\ L_{t+1})\,. \qquad /10/$$

Az előbb leírt módszer lehetővé teszi ugyanazon kockázati mérték két vagy több becslési módszerből származó értékének összehasonlítását. Közülük az a becslés tekinthető a legmegbízhatóbbnak, azaz a legpontosabbnak, amelyre a /10/ összefüggés a legkisebb értéket adja.

[11] *McNeil–Frey–Embrechts* [2015] alapján.

[12] Megjegyezzük, hogy a /10/ képletben megadott összegzés helyett a hibafüggvény egyes időpontokra vonatkozó értékeiből átlagot is számolhatunk.

Egy elicitálható kockázati mérték alkalmazásának nagy előnye, hogy a becsült valószínűségi változóra vonatkozó mintára támaszkodva – egy alkalmas hibafüggvény segítségével – különbséget tudunk tenni a kockázati mérték különféle becslési módszerekkel származtatott értékei között. Ez azt jelenti, hogy abban az esetben, amikor különböző kockázat-előrejelző modellek teljesítményének összehasonlítása a célunk, – egy, a becslőfüggvénnyel konzisztens hibafüggvényre támaszkodva – a *mintaelemekből kinyerhető* az előrejelzés pontosságára vonatkozó információ.[13]

2.4. Az ES nem elicitálható

Gneiting [2011] bizonyította, hogy az ES nem elicitálható. Ez azt jelenti, hogy nem található olyan szigorúan konzisztens hibafüggvény, amelyre nézve az ES optimális becslést szolgáltat. Másképpen fogalmazva: nem tudunk megadni hozzá olyan hibafüggvényt, amely várható értékének minimumhelyeként az ES előállítható.

Ebből egyes szerzők (lásd például *Carver* [2013]) arra a következtetésre jutottak, hogy az ES kockázati mérték nem visszatesztelhető. Más szerzők szerint (lásd *Tasche* [2014], *Davis* [2014], *Acerbi–Székely* [2014]) ez nem igazi probléma, legfeljebb csak kihívás az ES visszatesztelése során. Az elicitálhatóság hiánya valójában „csak" annyit jelent, hogy az ES becslése nem verifikálható az előbbiekben leírt egyszerű módon. Ez nyilván azért kihívás, mert kizárja a különböző, ES-t becslő modellek – előrejelzésük pontossága szerinti – rangsorolásának lehetőségét.

Acerbi és *Székely* [2014] szerint az ES visszatesztelhető,[14] és az elicitálhatóság hiánya nem jelent problémát az *abszolút modellvalidáció* során, amikor egy konkrét modell kockázat-előrejelző képességét szeretnénk megítélni. Említésre méltó – mint azt például *Acerbi* és *Székely* [2014] is kiemeli –, hogy a VaR elicitálhatósága ellenére e tulajdonságot nem használták (használják) a szabályozói gyakorlatban a VaR-becslések validációja során.[15]

3. A kockázati mértékektől elvárható tulajdonságok: kockázati axiómák

Egy nevezetes mérföldkő a kockázatelmélet fejlődésében a kockázati mértékek axiomatikus felépítése, azaz a kockázati mérőszámoktól elvárt sajátosságok megfo-

[13] Ez az angol *elicitability* szakkifejezés eredetére is magyarázatot ad. Az *elicit* ige jelentése ugyanis – amint a korábbiakban már említettük – kiderít, kiszed, tisztáz.

[14] A szerzők tanulmányukban három, az ES visszatesztelésére alkalmas módszert ismertetnek.

[15] Valójában a VaR nagyon egyszerűen visszatesztelhető arra alapozva, hogy a VaR-t meghaladó veszteség mint indikátorváltozó Bernoulli-eloszlást követ.

galmazása és rendszerbe foglalása. A kockázati axiómarendszerek közül a leginkább elfogadott *Artzner et al.* [1999] koherens mértékeket leíró rendszere, amelyre a szerzők nevének kezdőbetűiből álló *ADEH* (*Artzner–Delbaen–Eber–Heath*) rövidítéssel szokás hivatkozni. Az ún. *koherens* kockázati mértékeket leíró rendszer négy axiómát foglal magában.[16]

3.1. A koherens kockázati mértékeket leíró ADEH-féle axiómák

Legyen L egy portfólión adott időszakban elszenvedett veszteség, $R\left(L\right)$ pedig annak kockázata. *Artzner et al.* [1999] értelmezése szerint a kockázat az a *pótlólagos tőkemennyiség*, amely a portfólión elszenvedett veszteség kompenzálására szolgál. Az $R\left(L\right)$ kockázati mérték *koherens*, amennyiben teljesülnek rá a következő tulajdonságok.

1. Monotonitás axiómája:

$$\text{ha } L_1 \preceq L_2 \text{, akkor } R(L_1) \leq R(L_2)\,. \qquad /11/$$

Az első axióma azt fogalmazza meg, hogy egy olyan portfólió kockázata, amelyen elszenvedett veszteség nagy valószínűséggel (az esetek többségében)[17] nagyobb egy másik portfólión realizálható veszteségnél, nem lehet kisebb a másik portfólió kockázatánál.

2. Transzlációs invariancia axiómája:

$$R\left(L+k\right)=R\left(L\right)-k\,, \qquad /12/$$

ahol k tetszőleges valós érték (determinisztikus) mennyiség.

A második axióma azt mutatja, hogy egy portfólión elszenvedett veszteséghez k nagyságú tőkét adva az eredeti pozíció kockázata ugyanennyivel csökken.

3. Szubadditivitás axiómája:

$$R\left(L_1+L_2\right)\leq R\left(L_1\right)+R\left(L_2\right). \qquad /13/$$

[16] Az axiómák bemutatásában a következőkben – néhány, a jelöléseket érintő apróbb változtatástól eltekintve – *Bugár* [2015] leírását követjük.

[17] Megjegyezzük, hogy a /11/ képletben szereplő első egyenlőtlenség két veszteség (valószínűségi változó) közötti sztochasztikus reláció kifejezésére szolgál.

A harmadik axióma alapján két kockázatos befektetésből képzett portfólió kockázata nem lehet magasabb, mint az összetevői kockázatának összege. Úgy is fogalmazhatunk, ez az axióma támogatja a *diverzifikációt*, a befektetési gyakorlatból jól ismert tapasztalati alapelvet.

4. Pozitív homogenitás axiómája:

$$R\left(\lambda L\right)=\lambda R\left(L\right), \qquad /14/$$

ahol $\lambda > 0$, tetszőleges valós szám.

A negyedik axióma azt fejezi ki, hogy amennyiben növeljük egy pozíció méretét, azzal egyenes arányban nő a kockázata is.

A négy axióma közül a szubadditivitás axiómája a leginkább vitatott, talán azért, mert a bázeli szabályozásban kulcsfontosságú szerepet játszó VaR-ra ez nem teljesül. A VaR-ral mért kockázat esetében egy pénzintézet ösztönzést érezhet arra, hogy eredeti portfóliója „feldarabolásával” csökkentse a teljes portfóliójára kimutatott kockázatot, és ennek eredményeképpen a szabályozói tőkekövetelményét. Ezért hatalmas probléma, ha egy kockázati mértéktől nem várjuk el a szubadditivitásnak megfelelő „viselkedést”, ugyanis ekkor előfordulhat, hogy a diverzifikáció elvének követése nem csökkenti, hanem növeli a kockázatot.

Az általunk említett három kockázati mérték közül a *VaR nem koherens*, az *ES és a veszteségexpextilis* ($0{,}5 \leq \alpha < 1$ esetén) ellenben az.[18]

Említésre érdemes, hogy ha az előbb említett rendszerben a szubadditivitás és a pozitív homogenitás axiómáját a *konvexitás* axiómájával helyettesítjük, *konvex* kockázati mértékeket leíró rendszerhez jutunk. A *konvexitás axiómája* formálisan a következőképpen fogalmazható meg:

$$R\left(\lambda L_1+\left(1-\lambda\right)L_2\right)\leq \lambda R\left(L_1\right)+\left(1-\lambda\right)R\left(L_2\right). \qquad /15/$$

Tekintettel arra, hogy a pozitív homogenitás és a szubadditivitás teljesülése maga után vonja a konvexitást, egy *koherens* kockázati mérték egyben *konvex* is, de ennek fordítottja nem igaz. Csak pozitív homogén kockázati mértékekre következik a konvexitásból a koherencia.[19]

[18] Ezek bizonyítása megtalálható *McNeil–Frey–Embrechts* [2015] tanulmányában.
[19] A további részleteket illetően lásd *McNeil–Frey–Embrechts* [2015] munkáját.

3.2. Az elicitálhatóság kapcsolata a koherenciával és a konvexitással

Ziegel [2016] megállapította, hogy a veszteségexpektilis az egyetlen kockázati mérték, amely elicitálható és koherens is (feltéve, hogy $\alpha \geq 0,5$). Ez gyakorlati alkalmazhatóságát tekintve azonban nem releváns, mivel nem tudunk az expektilisnek értelmes közgazdasági jelentést tulajdonítani.

Bellini és *Bignozzi* [2015] bebizonyították, hogyha $T\left(F_L\right)$ egy veszteségalapú kockázati mérték becslőfüggvénye, amely teljesíti a monotonitás és transzlációs invariancia axiómáját, akkor a következők teljesülnek:

> *1.* $T\left(F_L\right)$ akkor és csak akkor konvex és elicitálható, ha a kockázati mérték veszteségfüggvénye konvex.
>
> *2.* $T\left(F_L\right)$ akkor és csak akkor koherens és elicitálható, ha a kockázati mérték egy veszteségexpektilis, amelyre $\alpha \geq 0,5$ (azaz a megbízhatósági szint legalább 50 százalék).

E tételből is következik, hogy az ES nem elicitálható kockázati mérték. Ez a sajátossága nehezíti, hogy a bázeli szabályozásban ténylegesen a VaR helyére lépjen. Ez magyarázza továbbá azt a korábban már említett látszólagos ellentmondást, hogy noha a szabályozói tőkekövetelmény meghatározásánál már felváltotta a VaR-t, a kockázatbecslő modell validitásának ellenőrzésére továbbra is a VaR alkalmazását írja elő a szabályozás.

A VaR kétségtelen érdeme, hogy elicitálható. Nem tekinthető azonban megbízható kockázati mértéknek. A VaR-ral kapcsolatos legfőbb probléma az, hogy nem veszi figyelembe az értékét meghaladó veszteségeket, ami vastagszélű eloszlások esetében a kockázat alulbecsléséhez vezet. A VaR egy másik hiányossága, hogy nem szubadditív – így nem koherens –, ezért egy portfólió VaR-ral mért kockázata magasabb lehet, mint az összetevői kockázatának az összege. További nagy hátránya, hogy nem konvex, így a VaR-t minimalizáló portfólió nem határozható meg egyértelműen.

4. Összegzés

Különböző modellek kockázat-előrejelző képességének megítélésében, azaz a megfelelő modell kiválasztásában és hatékony validálásában segítségünkre lehet egy, a statisztikai előrejelzés irodalmából ismert tulajdonság, az *elicitálhatóság*. Tudomásunk szerint − néhány szórványos utalástól[20] eltekintve − használata még nem honosodott meg a magyar szakirodalomban. Jelen tanulmányban ezért vállalkoztunk az angol *elicitability* fogalom *elicitálhatóság* néven történő bevezetésére. Emellett kísérletet tettünk arra is, hogy az *expektilis* szót, amely a várható érték általánosításának tekinthető, az angol *expectile* magyar megfelelőjeként honosítsuk.

Annak a problémának a megoldása, hogy egy kockázati mérték különféle módszerekkel becsült értékei közül melyik tekinthető a „legjobbnak", lényegében speciális alkalmazási területe annak az általános statisztikai problémának, amely egy jövőbeli eloszlás pontbecsült értékének pontosságával kapcsolatos. Ha a kockázat becslésére használt függvény elicitálható, akkor − egy megfelelő (nevezetesen a becslőfüggvénnyel konzisztens), a kockázat előre jelzett értékeinek a realizált veszteség értékeivel történő összehasonlítását lehetővé tevő hibafüggvény segítségével – egy adott időszakra vonatkozó *mintából kinyerhető* az előrejelzés pontosságára vonatkozó információ.

A tanulmányban felvetett probléma gyakorlati jelentősége a bankok tevékenységének nemzetközi szabályozásához, konkrétan a kötelező tartalékráta meghatározására szolgáló kockázati mérték becsléséhez kötődik. A VaR egészen a közelmúltig meghatározó szerepet játszott a bankok kereskedési könyvében szereplő pozíciók kockázatának értékelésében. Egy sor elméleti kutatás, valamint a 2008-as jelzáloghitel-piaci válság is bebizonyította a VaR tarthatatlanságát a bázeli szabályozásban. A helyettesítésére szánt kockázati mértékről, az ES-ről – amely a VaR számos hiányosságát kiküszöböli – azonban kiderült, hogy nem elicitálható. Ennek köszönhető, hogy az ES meglehetősen „felemás" módon került be a banki tevékenység bázeli szabályozásába. Amíg a piaci kockázatnak kitett pozíciók utáni szabályozói tőkekövetelmény megállapításánál az ES alkalmazását írja elő a szabályozás az ún. belső modellt használó bankok számára, addig a kockázatértékelő modell hitelesítése továbbra is VaR-alapon történik. Ezen a ponton szükséges megemlíteni, hogy a biztosítási szférában továbbra is mindkét célra a VaR-t használja a nemzetközi szabályozás (*IAIS* [2016]).

Az elicitálhatóság hiánya nehezíti az ES-modellek visszatesztelését. Elméleti szempontból a veszteségexpektilis, amely rendelkezik az ES kedvező sajátosságaival és még elicitálható is, prominens jelölt lehetne, hogy a VaR helyére lépjen. Annak okán azonban, hogy a veszteségexpektilisnek értelmes közgazdasági jelentés nem tulajdonítható, gyakorlati alkalmazása és bevezetése a bázeli szabályozásba nem tekinthető reális alternatívának.

Az ES visszatesztelésével kapcsolatos legújabb kutatások (lásd például *Acerbi−Székely* [2017], *Fissler−Ziegel* [2016], *Fissler–Ziegel–Gneiting* [2015])

[20] Lásd például *Béli−Váradi* [2017] és *Bugár* [2017].

eredményei meggyőződésünk szerint a közeljövőben hozzájárulnak majd a VaR és az ES közötti választást illető vita eredményes lezárásához az akadémiai szférában. Egyelőre azonban még nyitott kérdés, hogy merre halad tovább a szabályozás.

Irodalom

ANDERSON, A. L. [2012]: *A Study on Expectiles: Measuring Risk in Finance.* MSc Thesis. University of Georgia. Athens. https://getd.libs.uga.edu/pdfs/anderson_andrew_l_201212_ms.pdf

ACERBI, C. B. – SZÉKELY, B. [2014]: *Backtesting Expected Shortfall.* MSCI White Paper. MSCI Inc. pp. 1–37. https://www.msci.com/documents/10199/22aa9922-f874-4060-b77a-0f0e267a489b

ACERBI, C. B. – SZÉKELY, B. [2017]: *General Properties of Backtestable Statistics*. Working Paper. MSCI Inc. 24 January. http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2905109

ALBRECHT, P. [2004]: Risk measures. In: *Teugels, J. L. – Sundt, B*. (eds.): *Encyclopedia of Actuarial Science*. John Wiley & Sons Ltd. Chichester.

ARTZNER, P. – DELBAEN, F. – EBER, J. M. – HEATH, D. [1999]: Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*. Vol. 9. No. 3. pp. 203–228. https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068

BCBS (BASEL COMMITTEE IN BANKING SUPERVISION) [2016]: *Minimum Capital Requirements for Market Risk.* Bank for International Settlements. https://www.bis.org/bcbs/publ/d457.pdf

BELLINI, F. – BIGNOZZI, V. [2015]: On elicitable risk measures. *Quantitative Finance*. Vol. 15. No. 5. pp. 725–733. https://doi.org/10.1080/14697688.2014.946955

BÉLI M. – VÁRADI K. [2017]: Alapletét meghatározásának lehetséges módszertana. *Hitelintézeti Szemle/Financial and Economic Review*. 16. évf. 2. sz. 117–145. old. https://doi.org/10.25201/HSZ.16.2.117145

BUGÁR GY. [2017]: Mérföldkövek a befektetési kockázat modellezésében. *SZIGMA*. XLVIII. évf. 1–2. sz. 19–32. old.

BUGÁR GY. – RATTING A. [2016]: A piaci kockázat számszerűsítésének változása a Bázel III szabályozásban. *Hitelintézeti Szemle/Financial and Economic Review*. 15. évf. 1. sz. 33–50. old.

BUGÁR GY. [2015]: *Piaci és hitelkockázat-menedzsment*. Akadémiai Kiadó. Budapest.

BUGÁR GY. – UZSOKI M. [2006]: Befektetések kockázatának mérése. *Statisztikai Szemle*. 84. évf. 9. sz. 876–898. old.

CARVER, L. [2013]: Mooted VaR substitute cannot be back-tested, says top quant. *RiskNet*. 8 March. https://www.risk.net/regulation/basel-committee/2253463/mooted-var-substitute-cannot-be-back-tested-says-top-quant

DAVIS, M. [2014]: Consistency of internal risk measure estimates. *SSRN Electronic Journal*. 18 October. http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2342279

DOWD, K. – BLAKE, D. [2006]: After VaR – The theory, estimation and insurance applications of quantile-based risk measures. *Journal of Risk and Insurance*. Vol. 73. No. 2. pp. 193–229. https://doi.org/10.1111/j.1539-6975.2006.00171.x

EMBRECHTS, P. – RESNICK, S. I. – SAMORODNITSKY, G. [1999]: Extreme value theory as a risk management tool. *North American Actuarial Journal*. Vol. 3. No. 2. pp. 30–41. https://doi.org/10.1080/10920277.1999.10595797

EMBRECHTS, P. [2014]: *An Academic Response to Basel 3.5 – Risk Aggregation and Model Uncertainty*. Paper presented at the Conference on Extreme Events and Uncertainty in Insurance and Finance. 10 January. Paris.

FISSLER, T. – ZIEGEL, J. F. [2016]: Higher order elicitability and Osband's principle. *Annals of Statistics.* Vol. 44. No. 4. pp. 1680–1707. https://doi.org/10.1214/16-AOS1439

FISSLER, T. – ZIEGEL, J. F. – GNEITING, T. [2015]: *Expected Shortfall is Jointly Elicitable with Value at Risk – Implications for Backtesting*. Working Paper. July. https://arxiv.org/pdf/1507.00244.pdf

GNEITING, T. [2011]: Making and evaluating point forecasts. *Journal of the American Statistical Association*. Vol. 106. No. 494. pp. 746–762. https://doi.org/10.1198/jasa.2011.r10138

IAIS (INTERNATIONAL ASSOCIATION OF INSURANCE SUPERVISORS) [2016]: *Risk-based Global Insurance Capital Standard*. Version 1.0. Public Consultation Document. https://kpmg-lexlinks.de/fileadmin/Externe_Dokumente/Versicherungen/International/IAIS/CP/IAIS_CP_Risk-based_Global_Insurance_Capital_Standard.pdf

LAMBERT, N. S. – PENNOCK, D. M. – SHOHAM, Y. [2008]: Eliciting Properties of Probability Distributions. *Proceedings of the 9th ACM Conference on Electronic Commerce*. Association for Computing Machinery. New York. pp. 129–138.

MARKOWITZ, H. M. [1991]: Foundations of portfolio theory (Nobel Prize lecture). *Journal of Finance.* Vol. 46. Issue 2. pp. 469–477. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1991.tb02669.x

MCNEIL, A. J. – FREY, R. – EMBRECHTS, P. [2015]: *Quantitative Risk Management – Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press. Princeton, Oxford.

NEWEY, W. K. – POWELL, J. L. [1987]: Asymmetric least squares estimation and testing. *Econometrica*. Vol. 55. No. 4. pp. 819–847. https://doi.org/10.2307/1911031

ROCKAFELLAR, R. T. – URYASEV, S. [2000]: Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*. Vol. 2. No. 3. pp. 21–41.

SZEGÖ, G. [2002]: No more VaR (this is not a typo). *Journal of Banking and Finance*. Vol. 26. Issue 7. pp. 1247–1251. https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00280-7

TASCHE, D. [2014]: *Expected Shortfall is Not Elicitable. So What?* Presentation held at the University of Hannover. 23 January. https://www.stochastik.uni-hannover.de/fileadmin/institut/pdf/Talk_Tasche.pdf

ZIEGEL, J. F. [2016]: Coherence and elicitability. *Mathematical Finance*. Vol. 26. No. 4. pp. 901–918. https://doi.org/10.1111/mafi.12080

Summary

The paper highlights the importance of a key property called elicitability in risk measurement theory. Elicitability plays a crucial role in checking the validity of a risk estimation model. This topic is relevant in regulatory monitoring the performance of internal risk models used by banks in determining the minimum capital requirements for trading book portfolios. The recently published new standards of Basel III provide a revised framework for determining the capital charge for market risk in internal models with a shift from VaR (value-at-risk) to ES (expected shortfall). ES is a risk measure for better capturing tail risk and possessing some more favourable

properties such as coherence. However, ES has a serious disadvantage compared with VaR because it is not elicitable. Therefore, there is still a lot of debate in the literature, especially between financial mathematicians and statisticians whether ES is a proper risk measure to substitute VaR. A theoretically prominent applicant for this purpose might be the α-expectile which is both elicitable and coherent (for $\alpha \geq 0.5$). Its practical implementation, however, is excluded because it lacks any economic meaning. Despite that ES has got a foothold in Basel III and used as the proposed, new measure in estimating the risk of trading book positions, the Basel Committee still supports VaR for back-testing purpose. In the author's opinion, the recent developments in back-testing financial risk measures will contribute to the resolution of the debate among academics on the back-testability of ES as well as on the choice between VaR and ES. In fact, there is still an open question how banking regulation goes further.