

Közzététel: 2019. augusztus 2.

A tanulmány címe:

## **Hogyan tehető igazságosabbá a labdarúgó-mérkőzéseket követő büntetőpárbaj?**

Szerzők:

**Csató László,**

az MTA SZTAKI Mérnöki és Üzleti Intelligencia Kutatólaboratórium, Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoportjának tudományos munkatársa, a Budapesti Corvinus Egyetem Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszékének egyetemi adjunktusa;

E-mail: [laszlo.csato@uni-corvinus.hu](mailto:laszlo.csato@uni-corvinus.hu)

**Petróczy Dóra Gréta,**

a Budapesti Corvinus Egyetem Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszékének egyetemi tanársegédje;

E-mail: [doragreta.petroczy@uni-corvinus.hu](mailto:doragreta.petroczy@uni-corvinus.hu)

DOI: <https://doi.org/10.20311/stat2019.8.hu0779>

**Az alábbi feltételek érvényesek minden, a Központi Statisztikai Hivatal (a továbbiakban: KSH) Statisztikai Szemle c. folyóiratában (a továbbiakban: Folyóirat) megjelenő tanulmányra. Felhasználó a tanulmány vagy annak részei felhasználásával egyidejűleg tudomásul veszi a jelen dokumentumban foglalt felhasználási feltételeket, és azokat magára nézve kötelezőnek fogadja el. Tudomásul veszi, hogy a jelen feltételek megszegéséből eredő valamennyi kárért felelősséggel tartozik.**

1. A jogszabályi tartalom kivételével a tanulmányok a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI. törvény (Sztj.) szerint szerzői műnek minősülnek. A szerzői jog jogosultja a KSH.
2. A KSH földrajzi és időbeli korlátozás nélküli, nem kizárólagos, nem átadható, térítésmentes felhasználási jogot biztosít a Felhasználó részére a tanulmány vonatkozásában.
3. A felhasználási jog keretében a Felhasználó jogosult a tanulmány:
  - a) oktatási és kutatási célú felhasználására (nyilvánosságra hozatalára és továbbítására a 4. pontban foglalt kivétellel) a Folyóirat és a szerző(k) feltüntetésével;
  - b) tartalmáról összefoglaló készítésére az írott és az elektronikus médiában a Folyóirat és a szerző(k) feltüntetésével;
  - c) részletének idézésére – az átvevő mű jellege és célja által indokolt terjedelemben és az eredetihez híven – a forrás, valamint az ott megjelölt szerző(k) megnevezésével.
4. A Felhasználó nem jogosult a tanulmány továbbértékesítésére, haszonszerzési célú felhasználására. Ez a korlátozás nem érinti a tanulmány felhasználásával előállított, de az Sztj. szerint önálló szerzői műnek minősülő mű ilyen célú felhasználását.
5. A tanulmány átdolgozása, újra publikálása tilos.
6. A 3. a)–c.) pontban foglaltak alapján a Folyóiratot és a szerző(ke)t az alábbiak szerint kell feltüntetni:

„*Forrás: Statisztikai Szemle c. folyóirat 97. évfolyam 8. számában megjelent, Csató László – Petróczy Dóra Gréta által írt, 'Hogyan tehető igazságosabbá a labdarúgó-mérkőzéseket követő büntetőpárbaj?' című tanulmány (link csatolása)*”

7. A Folyóiratban megjelenő tanulmányok kutatói véleményeket tükröznek, amelyek nem esnek szükségképpen egybe a KSH vagy a szerzők által képviselt intézmények hivatalos álláspontjával.

## Hogyan tehető igazságosabbá a labdarúgó-mérkőzéseket követő büntetőpárbaj?\*

### Csató László,

az MTA SZTAKI Mérnöki és Üzleti Intelligencia Kutatólaboratórium, Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoportjának tudományos munkatársa,

a Budapesti Corvinus Egyetem Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszékének egyetemi adjunktusa

E-mail: laszlo.csato@uni-corvinus.hu

### Petróczy Dóra Gréta,

a Budapesti Corvinus Egyetem Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszékének egyetemi tanársegédje

E-mail: doragreta.petroczy@uni-corvinus.hu

A labdarúgásban – több más sportághoz hasonlóan –, ha egy mérkőzésen a rendes játékidőt követő hosszabbításban sem dől el, hogy melyik csapat juthat tovább, akkor ezt egy büntetőpárbaj segítségével határozzák meg. Az érvényben levő szabályok szerint mind az első öt körben, mind az esetleg szükségessé váló „hirtelen halál” szakaszban az egyik, pénzfeldobás révén kiválasztott csapat rúgja az első tizenegyest, ezáltal szignifikánsan nagyobb valószínűséggel győz, ami nem tekinthető igazságosnak, és sérti a hatékonyság elvét. A szerzők a büntetőpárbajok lebonyolítására szolgáló lehetséges mechanizmusokat, majd összehasonlításukat mutatják be egy matematikai-statisztikai modell segítségével, illetve empirikus alapokon. Ezek közül az első rúgás jogát a hátrányban levő csapatnak biztosító Felzárkóztató szabály áll legközelebb az azonos képességű csapatok egyenlő nyeresi valószínűségével megfogalmazható igazságosság kritériumához. A mechanizmus teljesítménye tovább javítható a szerzők által bevezetett módosítással.

TÁRGYSZÓ:

Labdarúgás.

Mechanizmustervezés.

Igazságosság.

DOI: 10.20311/stat2019.8.hu0779

\* Köszönettel tartozunk *Steven J. Bramsnak* és *Mehmet S. Ismailnak* a cikkük (*Brams–Ismail [2018]*) nyújtotta inspirációért. Hálásak vagyunk *Csató László* (az egyik szerző édesapja) programozás során nyújtott segítségéért és *Halm Tamás*, valamint az anonim lektor hasznos tanácsaiért.

A kutatást az NKFIH K 111797 és K 128573 pályázatok, az MTA Prémium posztdoktori kutatói program, az MNB Kutatási Kiválósági Díj, valamint az Emberi Erőforrások Minisztériuma ÚNKP-18-3 kódszámú Új Nemzeti Kiválósági Programja támogatta.

A sportban az igazságosság egyik lehetséges értelmezése szerint az egyenlő képességű csapatoknak és játékosoknak azonos valószínűséggel kell(ene) nyerniük. Ez a látszólag egyszerű követelmény a gyakorlatban számos esetben nem teljesül. Például *Krumer, Megidish és Sela* [2017] elméletileg, *Krumer és Lechner* [2017] pedig empirikusan igazolják, hogy a körmérkőzéses bajnokságok eredménye nem független a mérkőzések sorrendjétől; míg a svájci rendszerű sakkversenyek rangsorolási szabálya előnyben részesíti a javuló teljesítményű csapatokat (*Csató* [2013], [2017]). Tanulmányunkban a labdarúgásban alkalmazott büntetőpárbajok ilyen értelemben vett igazságosságának kérdését vizsgáljuk. Az 1968-as labdarúgó-Európa-bajnokság mérkőzései arra indították a FIFA-t (Fédération International de Football – Nemzetközi Labdarúgó-szövetség), hogy az 1970-es labdarúgó-világbajnokságtól kezdve az egyenes kieséses szakasz mérkőzésein, ha a rendes játékidőben, majd a hosszabbítás után egyaránt döntetlen az eredmény, akkor a korábban használt pénzfeldobás helyett büntetőpárbaj döntsön a továbbjutásról (*Anbarcı–Sun–Ünver* [2018]).

A büntetőpárbaj jelenleg érvényes szabályai értelmében először a játékvezető pénzfeldobással dönt arról, melyik kapura rúgják a tizenegyeseket, majd az egyik, újabb pénzfeldobással kiválasztott csapat eldönti, elsőként vagy másodikként végzi el azokat (*IFAB* [2018] 10. fejezet, 91–94. old.). Ezután az *A* és *B* csapat öt-öt büntetőt rúg az  $AB|AB|AB|AB|AB$  sorozatnak megfelelően. Ha az egyik csapat behozhatatlan előnyre tesz szert, a hátralevő büntetőrúgásokat már nem végzik el. Amennyiben az öt kör alatt sem születik meg a döntés, a büntetőpárbaj hirtelen halál (sudden death) szakasza kezdődik, változatlanul az *AB* sorrendben, mely egészen addig folytatódik, amíg az egyik csapat be nem rúgja, a másik csapat pedig ki nem hagyja a tizenegyesét. Ez az ún. *ABAB* szabály.

Miután a labdarúgásban a büntetők többsége sikeres, az adott körben a második tizenegyeset rúgó játékos többnyire nagyobb mentális terhet visel, különösen a harmadik, negyedik tizenegyesetől, amikor egy hiba a mérkőzés azonnali elvesztését jelentheti. Az IFAB (International Football Association Board – a FIFA Szabályalkotó Testülete) éppen ezért tervezi a büntetőpárbajok igazságosabbá tételét, ahogy azt a labdarúgás aktuális, 2018. június 1-jétől hatályos szabálykönyvében is megfogalmazza (*IFAB* [2018] Bevezetés – A jövő fejezet, 16. old.).

Az utóbbi időben több tudományos munka foglalkozott a büntetőpárbajok különböző mechanizmusaival (*Anbarcı–Sun–Ünver* [2015], [2018]; *Brams és Ismail* [2018]; *Echenique* [2017]; *Palacios-Huerta* [2012]), és a téma szélesebb körben is érdeklődésre tarthat számot (*Euronews* [2018], *MTA SZTAKI* [2018]).

Kiindulópontunk egy, a nagy presztízsű *SIAM Review* folyóiratban közelmúltban megjelent cikk (*Brams–Ismail* [2018]), ahol a szerzők egy matematikai-statisztikai modell segítségével megmutatják, hogy az általuk javasolt Kiegyenlítő (catch-up) szabály sokkal közelebb áll az igazságossághoz, mint a determinisztikus *ABAB* mechanizmus. Feltevéseiket elfogadva első lépésben belátjuk, a Kiegyenlítő szabály nem jobb a gyakorlatban már kipróbált *ABBA* rendszernél. Elemzésünkbe bevonjuk a Felzárkóztató (behind first, alternating order) (*Anbarcı–Sun–Ünver* [2015], [2018]), és a *Palacios-Huerta* [2012] javaslatának egyszerűsített formáját jelentő determinisztikus *ABBA|BAAB* mechanizmusokat is. Végül javaslatot teszünk a Kiegyenlítő és Felzárkóztató szabályok egy olyan módosítására, amely tovább közelíti azokat a vágyott egyenlő nyerési valószínűségek felé.

Tanulmányunk a következő felépítést követi. Az 1. fejezetben a büntetőpárbajok igazságosságának empirikus irodalmát tárgyaljuk, a 2. fejezet pedig a lebonyolítására javasolt szabályok működését vázolja. A 3. fejezetben ezeket a mechanizmusokat értékeljük egy egyszerű matematikai modell, illetve empirikus adatok segítségével. Írásunkat rövid összeggel zárjuk.

## 1. Empirikus eredmények

A pszichológiai nyomás alatt csökkenő teljesítmény vizsgálata a viselkedési közgazdaságtan régóta kutatott területe. Ahogy láttuk, a labdarúgásban alkalmazott büntetőpárbaj felfogható egy természetes kísérletként: ha az első csapat értékesíti a büntetőt, a másodikra nagyobb mentális teher hárul. A kiválasztás teljesen véletlenszerű, hiszen érmefeldobás dönt arról, ki választhat sorrendet. A feladat profi labdarúgók számára nem túl bonyolult, jól gyakorolható, mechanikus folyamat, ahol szinte minden körülmény állandó (kapu mérete, kaputól mért távolság stb.). Az eredmény egyszerűen megfigyelhető, az adatok rendelkezésre állnak. Ráadásul valódi térről van szó, nem pedig kétséges ösztönzőket alkalmazó laborkísérletről.

*Apestequia* és *Palacios-Huerta* [2010] 129 büntetőpárbaj adatait vizsgálva azt találták, hogy a párbajt kezdő csapat az esetek 60,5 százalékában megnyeri a mérkőzést. Probit regresszióval kontrollálva a hazai pályára, a csapatok közötti erőviszonyokra, illetve a megfelelő bajnokságra még erősebb hatást mértek. Azaz tanulmányuk alapján a második rúgóra pszichológiai nyomás nehezedik, amely rontja a teljesítményét.

*Kocher, Lenz és Sutter* [2012] ugyanakkor nem találtak szignifikáns előnyt. Az 540 megfigyelésből álló adatbázisuk *Apestequia* és *Palacios-Huerta* [2010] mintájának kibővítése volt. A szerzők szerint a különbséget az adatgyűjtési módszerek

okozták: *Kocher, Lenz és Sutter* [2012] az összes vizsgált labdarúgótorna minden büntetőpárbaját figyelembe vették 1970 és 2003 között, míg *Apestegui*a és *Palacios-Huerta* [2010] szelektív és részben hibás adatokkal dolgoztak.

*Palacios-Huerta* [2014] a minta újabb kibővítésével 1001 megfigyelésen mégsimételve a vizsgálatot, a korábbival egyező, szignifikáns eredményt talált. Ehhez hasonlóan *Da Silva, Mioranza és Matsushita* [2018] az 1970 és 2016 közötti 232 büntetőpárbaj vizsgálatokor 59,48 százalékos nyeresi valószínűséget állapítottak meg az elsőként rúgó csapat számára.

*Arrondel, Duhautois és Laslier* [2019] azonban ismét cáfolták *Apestegui*a és *Palacios-Huerta* [2010] eredményeit. Vizsgálatukat jóval frissebb, 2001 és 2018 közötti adatokon végezték, mindössze 252 francia büntetőpárbajt vettek figyelembe. Ugyanakkor azt találták, hogy a sikeres tizenegyes valószínűségét szignifikáns mértékben negatívan befolyásolja a tét nagysága (hogyan alakul a saját csapat végső győzelmének várható valószínűsége az adott büntetőrúgás függvényében), és a pszichikai nyomás (a saját csapat vereségének ex ante valószínűsége). Ennek következtében a későbbi körök tizenegyeseit alacsonyabb valószínűséggel értékesítik, kiélezett helyzetben még a tapasztalt játékosok is hajlamosabbak hibázni.

*Vandebroek, McCann és Vroom* [2018] cikke részben magyarázatot ad a korábbi eredmények közötti ellentmondásra. Elméleti modelljükben a rúgó akkor talál be alacsonyabb valószínűséggel, amikor csapata éppen hátrányban van. Mivel a kezdő csapat kisebb valószínűséggel kerül ebbe a helyzetbe, ezért arra jutottak, hogy a hátrányban levőkre nehezedő nyomás magyarázhatja a kezdő csapatok empirikus előnyét.

Szimulációjuk szerint mind *Apestegui*a és *Palacios-Huerta* [2010], mind *Kocher, Lenz és Sutter* [2012] túl kevés megfigyelést használtak a hatás egyértelmű kimutatásához. Abból kiindulva, hogy egy tizenegyes 75 százalékos valószínűséggel sikeres, a pszichológiai nyomás pedig 5 százalékponttal csökkenti ezt, 10 ezer – 540 megfigyelésből álló – mintát generáltak. Ezekkel az értékekkel elméletileg vissza kellett volna kapniuk a 60-40 százalékos győzelmi aránykülönbséget a két csapat között, mégis, csupán az esetek 56,5 százalékában találtak 5 százalékos szinten szignifikáns különbséget, ami magyarázhatja az eltérő eredményeket.

*Rudi, Olivares és Shetty* [2019] az eddigi legnagyobb mintát használták, összesen 1635 büntetőpárbaj adatait gyűjtötték össze. Ennek alapján a kezdő csapat 55 százalékban nyeri meg a mérkőzést, ami 10 százalékpontos előnyt jelent a másodikként rúgóhoz képest: a tizenegyesek értékesítésének valószínűsége a harmadik körtől kezdve szignifikánsan eltér egymástól. Bár a különbség közelebb van *Kocher, Lenz és Sutter* [2012] eredményeihez, mint az *Apestegui*a és *Palacios-Huerta* [2010], valamint *Palacios-Huerta* [2014] által talált 60 százalékhoz, mindenképpen szignifikáns különbség, ami indokolhatja a lehetséges lebonyolítási szabályok vizsgálatát. A szerzők adatokra kalibrált átmenetvalószínűségeket használó, Markov-láncon

alapuló modellje szerint a rúgássorrend megfordítása a páros körökben már garantálja az igazságosságot.

Összefoglalva, az áttekintett cikkek alapján nem zárható ki, hogy a büntetőpárbajok során az elsőként rúgó csapat előnyből indul. Ezt alátámasztja, hogy a pénzfeldobást nyerő csapat szinte mindig az első rúgás jogát választja (2003 júliusa előtt mindig a pénzfeldobás nyertese kezdte a büntetőpárbajt). *Apestegüia* és *Palacios-Huerta* [2010] labdarúgók és edzők között végzett felmérése szerint 95,9 százalék döntene így, 1,6 százalék indifferens, míg 2,5 százalék választása az adott helyzettől függ. A megkérdezettek jelentős többsége ezáltal szeretne nyomást helyezni a másodikkak rúgó csapatra.

Ezért a következőkben az elsőként rúgó csapat által élvezett előny (bizonyos esetekben hátrány) csökkentése, a nyerési valószínűségek kiegyensúlyozása a célunk, abból a feltételezésből kiindulva, hogy egy pénzfeldobás eredményre gyakorolt hatása aligha indokolható.

## 2. A büntetőpárbajok néhány mechanizmusa

A továbbiakban *A*-nak hívjuk azt a csapatot, amelyik az első körben kezdi a büntetőpárbajt, és *B* csapatnak a másodikként rúgót. A jelenleg használt mechanizmus az ún. *ABAB* szabály, amely szerint az első körben kezdő csapat fog minden egyes körben elsőnek rúgni.

Kutatók több lehetséges rendszert javasoltak a büntetőpárbajok lebonyolítására. Az egyik legkézenfekvőbb módszer a jogosulatlan előny csökkentésére az *ABBA* szabály, amikor az első két tizenegyes (*AB*) tükörképe a következő kettő (*BA*). Ezt már több alkalommal tesztelték: elsőként a 2017 májusában megrendezett férfi és női U17-es labdarúgó-Európa-bajnokságokon (*UEFA* [2017b]), majd a 2017. júniusi férfi és női U19-es labdarúgó-Európa-bajnokságokon (*UEFA* [2017a]). Az első *ABBA* rendszerű büntetőpárbajt 2017. május 11-én, a női U17-es labdarúgó-Európa-bajnokság elődöntőjében Németország nyerte meg Norvégiával szemben (*Thomson Reuters* [2017]). A 2017-es angol labdarúgó-szuperkupa (FA Community Shield) győztese, az *Arsenal* szintén így diadalmaskodott a *Chelsea* felett. Bár az IFAB 133. éves gyűlése 2018. november 22-én úgy határozott, kellő támogatottság hiányában – ami elsősorban a szabály komplexitásának köszönhető – a jövőben nem alkalmazza azt (*FIFA* [2018]). Ennek ellenére például a holland labdarúgókupa 2018/19-es idényében ezzel a mechanizmussal bonyolítják le a büntetőpárbajokat (*KNVB* [2018]).

Az *ABBA* szabályt használják a teniszben, a 6-6-os állást követő rövidített játék (tie-break) során, ahol ez a mechanizmus garantálja az igazságosságot (*Cohen-Zada*–

*Krumer–Shapir* [2017], [2018]). Ehhez hasonlóan a sakkban, ahol a páros mérkőzések páratlan számú játszmáit világgossal kezdő játékos szintén 60 százalék körüli valószínűséggel győz (*González-Díaz–Palacios-Huerta* [2016]), már a 2006-os világbajnoki döntőtől kezdve a 12 játszmás mérkőzés félidejében változtatnak a sorrenden, így az egyik sakkozó az 1., 3., 5., 8., 10. és 12. játszmákban játszik világgossal.

Az *ABBA* szabály továbbfejlesztett változata az *ABBA|BAAB* rendszer, amely alapján a harmadik kört *B*, a negyediket *A*, míg az ötödiket ismét *A* kezdi, majd ez a mintázat ismétlődik. Ez a *Palacios-Huerta* [2012] által javasolt Prouhet–Thue–Morse-sorozat egyszerűsített változata. Az eredeti felvetés szerint az *ABBA|BAAB* sorozat fordítva, *BAAB|ABBA*-val folytatódna, és így tovább. Úgy véljük, az eredeti Prouhet–Thue–Morse-sorozat használata bonyolult lenne a mérkőzések során, és nem járna jelentősen kiegyenlítettőbb esélyekkel, mint az *ABBA|BAAB* szabály. Az említett mechanizmusok mindegyike determinisztikus, azaz a következő rúgó kiléte nem függ a korábbi büntetőrúgások kimenetelétől.

A *Kiegyenlítő szabály* az előző körben rúgott tizenegyesek eredményének figyelembevételével határozza meg a rúgás sorrendjét (*Brams–Ismail* [2018]). Alapesetben az *ABBA* szabályhoz hasonlóan minden körben megcseréli a csapatokat, kivéve, ha az előző kör első rúgója kihagyta, a második viszont értékesítette büntetőjét, azaz az elsőnek rúgó csapat nem volt képes kihasználni előnyös helyzetét.

Illusztrációként vegyük azt az esetet, amikor az *A* csapat két büntetőt értékesít, a másodikat és a negyediket, míg a *B* csapat szintén kettőt rúg be, az elsőt és a másodikat. Az első büntető *B* csapatnak sikeres (0-1), ezért a második kört *A* kezdi, ahol mindkét csapat értékesíti a tizenegyesét (az állás 1-2). Így a harmadik kört *B* kezdi, itt mindkét csapat kihagyja (1-2). Tehát *A* kezdi a negyedik kört, rúgója értékesíti, a *B* csapat játékosja ellenben kihagyja büntetőjét (2-2). Mivel az előző körben kihagyta, a Kiegyenlítő szabály értelmében az ötödik körben *B* az első rúgó, de mindkét csapat elhibázza a büntetőt (2-2). A büntetőpárbaj a hirtelen halál szakasszal folytatódik, ahol a Kiegyenlítő mechanizmus szerint *A* az első rúgó. Tehát a sorrend  $AB|AB|BA|AB|BA$  (hirtelen halál)  $AB|BA|AB\dots$

A *Felzárkóztató szabály* értelmében mindig a hátrányban levő csapat kezdi a következő kört, döntetlen állás esetén pedig az, aki az előző körben másodiknak rúgott (*Anbarcı–Sun–Ünver* [2015], [2018]). A korábbi példánál maradva, mivel az első körben csak *B* értékesíti a büntetőjét, a második kört *A* kezdi. A második körben mindkét csapat berúgja (az állás 1-2), ezért a harmadik kört, a Kiegyenlítő szabállyal ellentétben, ismét *A* kezdi. Itt mindkét játékos hibázik (1-2), ezért a negyedik kört *A* kezdi. Ebben a körben *A* berúgja, *B* kihagyja (2-2), tehát a következő kört *B* kezdi. Az ötödik körben mindkét csapat elhibázza tizenegyesét (2-2), így a büntetőpárbaj a hirtelen halál szakasszal folytatódik, amelyet a Felzárkóztató szabály értelmében *A* kezd.

Mind a Kiegyenlítő, mind a Felzárkóztató szabály módosítható azzal, hogy a hirtelen halál szakaszt minden esetben az első büntetőt másodikként rúgó, tehát a *B* csapat kezdi (feltéve, hogy a büntetőpárbaj eljut idáig). A kezdő csapat előnyének ezen kompenzálása célszerű lépésnek bizonyulhat az igazságosság felé vezető úton: az így kapott *Változó kiegyenlítő* (adjusted catch-up) szabály a Kiegyenlítőnél igazságosabb mechanizmus (Csató [2019]). A hasonló módon definiált *Változó felzárkóztató* (adjusted behind first, alternating order) szabály vizsgálatára elsőként jelen tanulmányban kerül sor.

A különböző szabályok szerinti büntetőpárbajokat az 1. táblázatban foglaljuk össze, ahol ✓ a sikeres, míg ✗ a sikertelen tizenegyeseket jelöli. Látható, hogy az első, rögzített hosszúságú (öt körből álló) szakaszban történetektől függetlenül, a Változó kiegyenlítő és a Változó felzárkóztató szabály alapján is a *B* csapat kezdi a hirtelen halál szakaszt.

1. táblázat

Példa a különböző büntetőpárbajokra

Rúgás	ABAB		ABBA		AB <sup>2</sup>   BA <sup>2</sup>		Kiegyenlítő		Változó kiegyenlítő		Felzárkóztató		Változó felzárkóztató	
	szabály													
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
	csapat													
1.	✗		✗		✗		✗		✗		✗		✗	
2.		✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓
3.	✓			✓		✓	✓		✓		✓		✓	
4.		✓	✓		✓			✓		✓		✓		✓
5.	✗		✗			✗		✗		✗	✗		✗	
6.		✗		✗	✗		✗		✗			✗		✗
7.	✓			✗	✓		✓		✓		✓		✓	
8.		✗	✓			✗		✗		✗		✗		✗
9.	✗		✗		✗			✗		✗		✗		✗
10.		✗		✗		✗	✗		✗		✗		✗	
11.	✓			✓		✓	✓			✓	✓			✓
12.		✓	✓		✓			✓	✓			✓	✓	
13.	✓		✓			✗		✗	✓			✗	✓	
14.		✗		✗	✓		✓			✗	✓			✗

Megjegyzés. ✓ a sikeres, míg ✗ a sikertelen tizenegyeseket jelöli.  $AB^2 | BA^2 = ABBA | BAAB$ .



### 3. A szabályok összehasonlítása

A következőkben a különböző módszerek igazságosságát fogjuk értékelni. Az empirikus kutatások alapján elfogadható feltételezés, hogy azonos képességű játékosok esetén egy tizenegyes sikeressége csupán attól függ, hogy adott körben elsőként vagy másodikként rúgják (*Apesteguia–Palacios-Huerta* [2010]). Ekkor az igazságosság biztosításához a két csapatnak azonos valószínűséggel kell(ene) nyernie a büntetőpárbajt. Az első rúgó ezért a magasabb  $p$ , míg a második az alacsonyabb  $q$  valószínűséggel talál be, ami garantálja az első büntetőt rúgó csapat előnyét. Ugyanezt a modellt használja *Brams* és *Ismail* [2018].

#### 3.1. Nyeresi valószínűségek a hirtelen halál szakaszban

Ha a büntetőpárbaj első szakasza döntetlennel zárul, a tizenegyesek a hirtelen halállal folytatódnak. Ebben a részben addig játszanak, amíg egyik csapat értékesíti, a másik kihagyja a büntetőjét. Tegyük fel, hogy az  $A$  csapat kezdi a hirtelen halál szakaszt.  $W(A)$  legyen annak valószínűsége, hogy az  $A$  csapat megnyeri ezt, amennyiben a mérkőzés eljut eddig. A (Változó) Kiegyenlítő, a (Változó) Felzárkóztató és az  $ABBA$  szabályok megegyeznek ebben a szakaszban, az első körben  $AB$  a sorrend, a következőben (ha van ilyen)  $BA$ , majd visszatér az  $AB$ . *Brams* és *Ismail* [2018] levezetése alapján

$$W(A) = \frac{1 - q + pq}{2 - p - q + 2pq}.$$

Az empirikus eredményekhez közel álló  $p = 3/4$  és  $q = 2/3$  valószínűségek mellett  $W(A) = 10/19 \approx 0,526$ .

Az  $ABBA|BAAB$  szabályt tekintve négy esetet lehet megkülönböztetni, attól függően, hány előre meghatározott körből áll a büntetőpárbaj.

– **A rögzített hosszúságú szakasz  $4k$  körig tart:** a hirtelen halált  $A$  kezdi, majd kétszer  $B$ , kétszer  $A$ ... Jelölje  $S(A)$  annak valószínűségét, hogy az  $A$  csapat megnyeri a hirtelen halál szakaszt, ami nyilván  $p$  és  $q$  függvénye.

Annak valószínűsége, hogy  $A$  az első körben nyer:  $p(1 - q)$ .

Ha mindkét csapat berúgja, vagy kihagyja az első körben, a hirtelen

halál szakasz a második körrel folytatódik, ennek valószínűsége  $pq + (1-p)(1-q)$ . A második körben  $B$  kezd, tehát annak valószínűsége, hogy  $A$  a második körben nyer:  $[pq + (1-p)(1-q)](1-p)q$ .

A következő körben  $BA$  a sorrend, majd a negyedik körben  $AB$ , azaz éppen fordítottja az első két körnek. Az ötödik körtől pedig ismétlődik az eredeti sorrend. Így annak valószínűsége, hogy a büntetőpárbaj eljut a harmadik körig, majd  $A$  csapat megnyeri a mérkőzést:  $[pq + (1-p)(1-q)]^2(1-S(A))$ .

Az  $S(A)$  valószínűséget ezek után egyszerűen megkaphatjuk a következő rekurzióból:

$$S(A) = p(1-q) + [pq + (1-p)(1-q)](1-p)q + [pq + (1-p)(1-q)]^2(1-S(A)).$$

Ebből:

$$S(A) = \frac{p(1-q) + (1-p-q+2pq)(1-p)q + (1-p-q+2pq)^2}{1 + (1-p-q+2pq)^2},$$

$$p = 3/4 \text{ és } q = 2/3 \text{ mellett } S(A) = 99/193 \approx 0,513.$$

– **A rögzített hosszúságú szakasz  $4k+1$  körig tart:** a hirtelen halált  $B$  kezdi kétszer, majd kétszer  $A$ , kétszer  $B$ ...

Jelölje  $T(A)$  annak valószínűségét, hogy az  $A$  csapat megnyeri a hirtelen halál szakaszt:

$$T(A) = \frac{(1-p)q + (1-p-q+2pq)(1-p)q + (1-p-q+2pq)^2}{1 + (1-p-q+2pq)^2},$$

$$p = 3/4 \text{ és } q = 2/3 \text{ mellett } T(A) = 87/193 \approx 0,451.$$

– **A rögzített hosszúságú szakasz  $4k + 2$  körig tart:** a hirtelen halált  $B$  kezdi, majd kétszer  $A$ , kétszer  $B$ ...

Mivel ez az első eset fordítottja, ezért annak valószínűsége, hogy  $A$  győz:  $1 - S(A)$ .

– **A rögzített hosszúságú szakasz  $4k + 3$  körig tart:** a hirtelen halált  $A$  kezdi kétszer, majd kétszer  $B$ , kétszer  $A$ ...

Ez pedig a második eset, csak  $A$  és  $B$  sorrendje felcserélve, így annak valószínűsége, hogy az  $A$  csapat nyeri meg a hirtelen halált:  $1 - T(A)$ .

### 3.2. Illusztráció: kétkörös büntetőpárbajok

*Apestequia* és *Palacios-Huerta* [2010] empirikus eredményei alapján *Brams* és *Ismail* [2018] a  $p = 3/4$  és  $q = 2/3$  értékeket használták számításaikhoz, ezért jelen tanulmányban is ennél a választásnál maradunk.

Illusztrációként tekintünk azt a példát, amikor a büntetőpárbaj csupán két körből áll, ezt a hirtelen halál szakasz követi. Két kör esetén a Kiegyenlítő és a Felzárkóztató szabály megegyezik, hiszen a második körben az előző kör eredménye és az előző körök alapján kialakult állás ugyanaz.

*Brams* és *Ismail* [2018] alapján a Kiegyenlítő (Felzárkóztató) szabályt használva,  $p = 3/4$  és  $q = 2/3$  mellett annak a valószínűsége, hogy két kör után:

- az  $A$  csapat nyer:  $X^2(A) = 41/144 \approx 0,285$ ;<sup>1</sup>
- a  $B$  csapat győz:  $X^2(B) = 39/144 \approx 0,270$ ;
- az eredmény döntetlen:  $X^2(T) = 64/144 \approx 0,444$ .

A Kiegyenlítő (és a kétkörös eset miatt a Felzárkóztató) szabály alapján a hirtelen halál szakasz első körében  $A$  csapat kezd  $58/144 \approx 0,403$  valószínűséggel.

Annak valószínűsége pedig, hogy a harmadik kört a  $B$  csapat kezdi,  $6/144 \approx 0,042$ . Következésképp annak valószínűsége, hogy az  $A$  csapat győz:

$$Y^2(A) = X^2(A) + \frac{58}{144} \times \frac{10}{19} + \frac{6}{144} \times \frac{9}{19} = \frac{1413}{2736} \approx 0,516.$$

<sup>1</sup> *Brams* és *Ismail* ([2018] 188. old.) számítása kerekítési hibát tartalmaz. A 2-es felső index azt jelzi, hogy a valószínűség a kétkörös büntetőpárbajra vonatkozik.

Ugyanakkor a Változó kiegyenlítő (Felzárkóztató) szabály értelmében a hirtelen halál szakaszt garantáltan a  $B$  csapat kezdi, tehát annak valószínűsége, hogy az  $A$  lesz a győztes:

$$Y^2(A) = X^2(A) + \frac{64}{144} \times \frac{9}{19} = \frac{1355}{2736} \approx 0,495.$$

Mivel az  $ABBA$  szabályt *Brams* és *Ismail* [2018] nem vizsgálták, ezért a nyerési valószínűségek számítását a továbbiakban részletesen bemutatjuk.

Két kör alatt háromféleképpen győzhet az  $A$  csapat:

**I. 2-0: Az  $A$  csapat mindkét büntetőjét értékesíti, míg a  $B$  mindkettőt elhibázza.** Az első körben  $A$  berúgja,  $B$  kihagyja  $p(1-q)$  valószínűséggel. A második kört  $B$  csapat kezdi, de nem sikerül értékesíteni a büntetőt, míg a másodiknak rúgó  $A$  csapat sikeres, ennek valószínűsége  $(1-p)q$ . A két esemény együttes valószínűsége:  $p(1-q)(1-p)q$ .

**II. 2-1: A mindkettőt berúgja, míg  $B$  csak az egyiket.** Ez az állás két különböző módon jöhet létre:

–  *$B$  az első körben rúgja be.* Az első körben mindkét csapat értékesíti a büntetőjét, ennek valószínűsége:  $pq$ . A második kört  $B$  kezdi, de kihagyja, majd  $A$  berúgja  $(1-p)q$  valószínűséggel. A két kör együttes valószínűsége:  $pq(1-p)q$ .

–  *$B$  a második körben rúgja be.* Az első körben  $A$  berúgja,  $B$  kihagyja  $p(1-q)$  valószínűséggel. A második körben  $B$  kezd, és mindkét csapat értékesíti a büntetőt  $pq$  valószínűséggel. A két kör együttes valószínűsége:  $p(1-q)pq$ .

Annak valószínűsége, hogy a végeredmény 2-1:  $pq(1-p)q + p(1-q)pq$ .

**III. 1-0: A egyiket berúgja, míg  $B$  mindkettőt kihagyja.** Ebben az esetben is két különböző forgatókönyv képzelhető el:

–  *$A$  az első büntetőjét értékesíti.* Az első körben  $A$  berúgja,  $B$  kihagyja  $p(1-q)$  valószínűséggel. A második körben mindkét csapat kihagyja  $(1-p)(1-q)$  valószínűséggel. Az együttes valószínűség:  $p(1-q)(1-p)(1-q)$ .

–  *$A$  a második körben rúgja be.* Az első körben mindkét csapat kihagyja  $(1-p)(1-q)$  valószínűséggel. A második körben első-

nek rúgó  $B$  kihagyja,  $A$  berúgja,  $(1-p)q$  valószínűséggel. Vagyis a két kör együttes valószínűsége:  $(1-p)(1-q)(1-p)q$ .

Tehát az 1-0 végeredmény  $p(1-q)(1-p)(1-q) + (1-p)(1-q)(1-p)q$  valószínűséggel következik be.

A  $p=3/4$  és  $q=2/3$  feltevést használva:

- az  $A$  csapat győzelmének valószínűsége  $X^2(A) = 41/144 \approx 0,285$ ;
- a  $B$  csapat nyer  $X^2(B) = 41/144 \approx 0,285$  valószínűséggel;
- a döntetlen valószínűsége  $X^2(T) = 62/144 \approx 0,431$ .

Nem meglepő, hogy az  $ABBA$  szabály két (sőt, tetszőleges páros számú) kör alatt egyenlő esélyeket biztosít mindkét csapatnak.

Az  $ABBA$  mechanizmus alkalmazásakor a hirtelen halál szakaszt (a harmadik kört) az  $A$  csapat kezdi, tehát annak valószínűsége, hogy  $A$  megnyeri a mérkőzést:

$$Y^2(A) = X^2(A) + \frac{62}{144} \times \frac{10}{19} = \frac{1399}{2736} \approx 0,511.$$

Az  $ABBA|BAAB$  szabály az első két kör során megegyezik az  $ABBA$ -val, tehát az egyes csapatok nyelési valószínűsége is ugyanakkora. A hirtelen halál szakaszt azonban a  $B$  csapat kezdi, és a 3.1. alfejezetben kiszámoltak alapján annak valószínűsége, hogy az  $A$  nyeri meg:  $1 - S(A)$ . Tehát annak valószínűsége, hogy a mérkőzés  $A$  győzelmével zárul:

$$Y^2(A) = X^2(A) + \frac{62}{144} \times \frac{94}{193} = \frac{13741}{27792} \approx 0,494.$$

Összefoglalva, bár az eredeti  $ABAB$  szabályhoz képest mindegyik módszer igazságosabb eredményre vezet, a kétkörös példa alapján a Változó kiegyenlítő (felzárkóztató) módszer egyenlíti ki leginkább az esélyeket. Míg a Kiegyenlítő (Felzárkóztató)  $100 \times (0,516 / 0,484 - 1) = 6,8$  százalékos, az  $ABBA$  4,64 százalékos előnyt, az  $ABBA|BAAB$  mechanizmus pedig 2,3 százalékos hátrányt ad a büntetőpárbajt kezdő

csapatnak, addig a Változó kiegyenlítő (Felzárkóztató) szabály alapján a kezdő csapat csupán 1,92 százalékos hátrányban van.

2. táblázat

*Az A csapat győzelmi valószínűsége ( $p=3/4$  és  $q=2/3$ )*

Kör	$ABBA$	$AB^2   BA^2$	Kiegyenlítő	Változó kiegyenlítő	Felzárkóztató	Változó felzárkóztató
Első	0,526	0,513	0,526	0,526	0,526	0,526
Második	0,511	0,494	0,516	0,495	0,516	0,495
Harmadik	0,519	0,489	0,518	0,515	0,516	0,512
Negyedik	0,508	0,504	0,513	0,501	0,512	0,500
<b>Ötödik</b>	<b>0,515</b>	<b>0,509</b>	<b>0,514</b>	<b>0,509</b>	<b>0,512</b>	<b>0,506</b>
Hatodik	0,507	0,497	0,512	0,504	0,510	0,501
Hetedik	0,513	0,492	0,512	0,507	0,510	0,503
Nyolcadik	0,506	0,503	0,511	0,504	0,508	0,501

*Megjegyzés.  $AB^2 | BA^2 = ABBA | BAAB$ .*

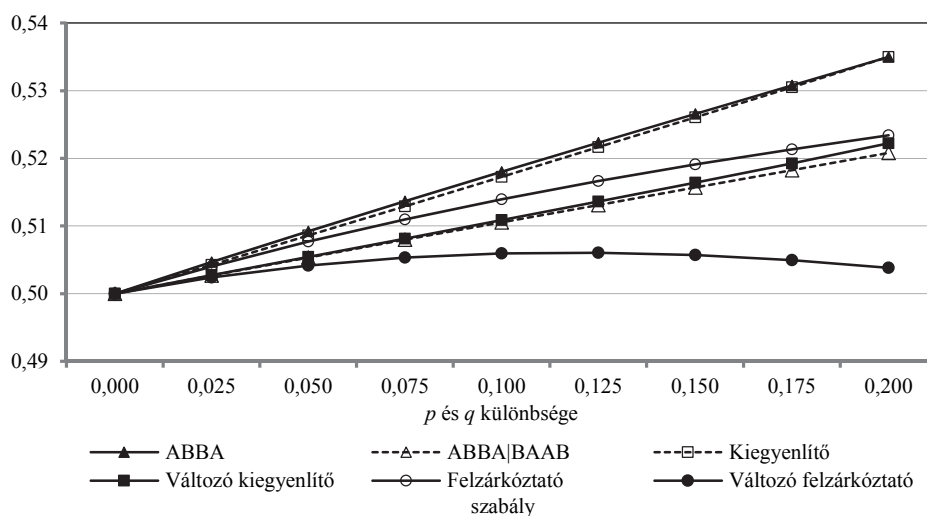
### 3.3. Melyik a leginkább igazságos mechanizmus?

A továbbiakban több körre is megnézzük a különböző módszerek teljesítményét. A számítás az előző alfejezetben leírtakhoz hasonlóan végezhető, azonban a képletek egyre bonyolultabbá válnak, ezért csak a numerikus eredményeket közöljük. A 2. táblázatban láthatók az első tizenegyest rúgó A csapat nyerési valószínűségei a különböző szabályokkal, legfeljebb nyolckörös, hirtelen halál szakasszal záruló büntetőpárbaj esetén, ha  $p=3/4$  és  $q=2/3$ . Ezeket a valószínűségeket használva a jelenleg használatos  $ABAB$  szabály esetén nagyjából visszakapnánk a kezdő csapatnak azt az előnyét, amelyet az empirikus kutatások is találtak (*Brams–Ismail* [2018]).

A 2. táblázatban látható értékek alapján megfigyelhető egy páros-páratlan hatás. Ha a büntetőpárbaj páros számú előre meghatározott körből áll, akkor a két csapat esélyei mindegyik módszer esetén kiegyenlítettebbek. Érdekes eredmény, hogy a viszonylag egyszerű  $ABBA$  szabály páros számú kör mellett jobbnak bizonyul a Kiegyenlítő és a Felzárkóztató szabálynál. Amennyiben csak egyetlen körös a büntetőpárbaj, akkor az  $ABBA | BAAB$  módszer bizonyult a legigazságosabbnak, azonban ez a kiegyenlített hirtelen halál szakasznak köszönhető. Ha több előre meghatározott kör van, akkor a legjobb módszernek a Változó felzárkóztató szabály bizonyul. A jelenleg használt ötkörös rendszerben a Változó felzárkóztató szabály mindössze 2,43 százalékos előnyt ad a kezdő csapatnak.

Az eddigiekben feltettük, hogy  $p = 3/4$  és  $q = 2/3$ . Az 1. ábra a Vandebroek, McCann és Vroom [2018] nyomán elvégzett érzékenységvizsgálat eredményét mutatja: amennyiben az első rúgó rögzített – jelen esetben 75 százalékos – valószínűséggel értékesíti büntetőjét, a második rúgó hátránya, azaz  $p - q$  függvényében ábrázolható az  $A$  csapat nyerési valószínűsége (a grafikon robusztus  $p$  választására nézve). A vizsgált mechanizmusok közül az  $ABBA$  és a Kiegyenlítő szabályok a legkevésbé igazságosak, míg az  $ABBA|BAAB$  és a Változó kiegyenlítő szabályok ismét hasonlóan szerepelnek. A Felzárkóztató ugyan ezeknél rosszabb, de a legkisebb előnyt az ennek módosításával kapott Változó felzárkóztató mechanizmus juttatja a kezdő csapatnak. Matematikai érdekesség, hogy az utóbbi szabály igazságtalansága nem monoton, mert a másodikiként rúgó csapat nagymértékű (a gyakorlatban kevéssé valószínű) hátránya a hirtelen halál szakaszon keresztül jobban kompenzálható, mint egy közepes, 12-13 százalékpont körüli különbség. Sőt, 25 százalékpontnál nagyobb eltérés esetén már a kezdő csapat kerülne rosszabb helyzetbe.

1. ábra. Az  $A$  csapat győzelmi valószínűsége ötkörös büntetőpárbaj esetén, hirtelen halál szakasszal



### 3.4. A szabályok empirikus összehasonlítása

Az előzőekben egy olyan matematikai modellt vizsgáltunk, ahol a sikeres büntetőrúgás valószínűsége kizárólag attól függött, az adott csapat játékosa első vagy második rúgó-e. Apesteguija és Palacios-Huerta [2010] ökonometriai vizsgálatokkal iga-

zolja, hogy egyetlen másik változó sem tekinthető szignifikánsnak. Ugyanakkor a tizenegyesek értékesítésének esélye különbözik az egyes körökben, ahogy azt a 3. táblázat mutatja.

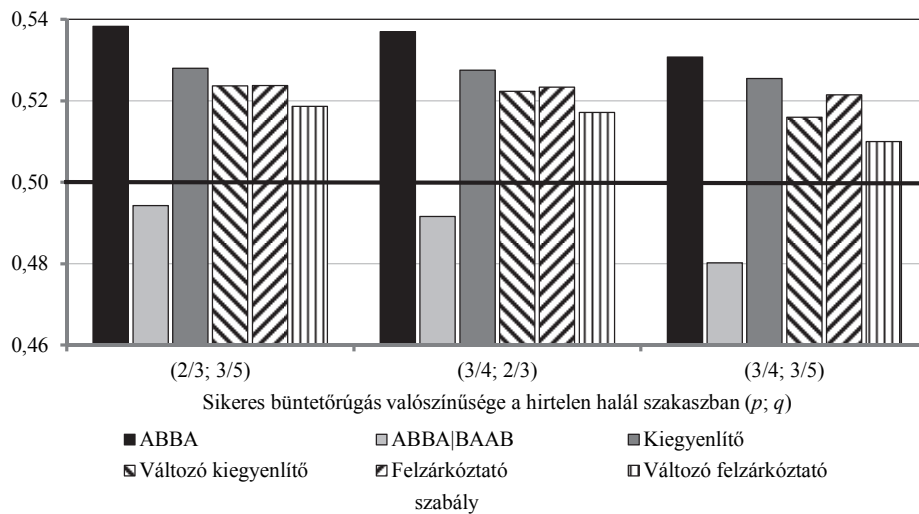
3. táblázat

*A sikeres büntetőrúgás empirikus valószínűsége az egyes körökben*

Kör	Első rúgó	Második rúgó
Első	0,79	0,72
Második	0,82	0,77
Harmadik	0,77	0,64
Negyedik	0,74	0,68
Ötödik	0,74	0,67

*Forrás: Apesteigua és Palacios-Huerta ([2010] 2558. old.).*

*2. ábra. Az A csapat empirikus győzelmi valószínűsége ötkörös büntetőpárbaj esetén, hirtelen halál szakasszal*



A hirtelen halál szakaszban érvényes valószínűségekről – a kis mintaelemszám miatt – véleményünk szerint nem áll rendelkezésre megbízható adat, ezért ott a korábban alkalmazott feltevésünkkel élünk, azaz az első rúgó  $p$ , míg a második  $q$  valószínűséggel értékesíti tizenegyesét. Az így számolt „empirikus” nyerési valószínűségekről a 2. ábra tájékoztat. Ismét az *ABBA* szabály teljesít leggyengébben az igazsá-



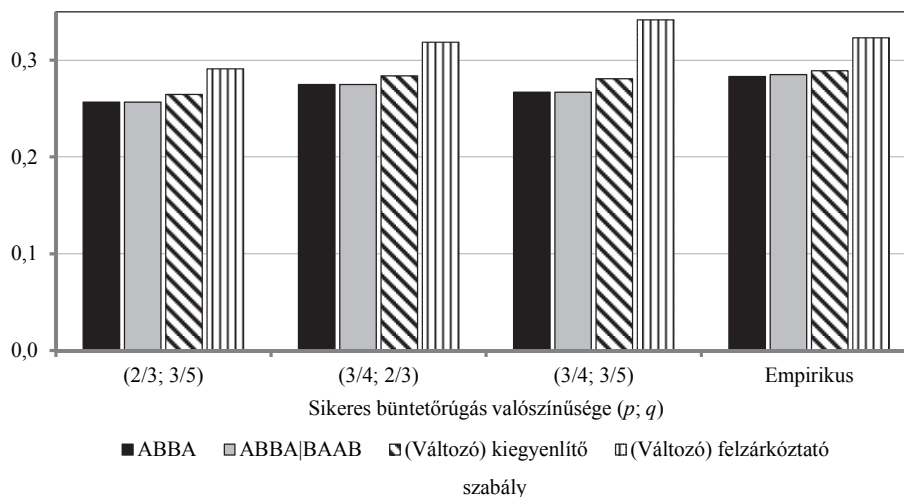
gosság szempontjából. A Felzárkóztató mechanizmus jobb a Kiegyenlítőnél, és mindkét rendszer teljesítményén javít, ha a hirtelen halál szakaszt biztosan az első büntetőt másodikként rúgó  $B$  csapat kezdi. Közeli  $p$  és  $q$  értékek esetén az  $ABBA|BAAB$  determinisztikus szabály áll legközelebb az igazságossághoz, a különbség növekedésével azonban ez a mechanizmus egyre inkább hátrányos a büntetőpárbajt kezdő  $A$  csapat számára.

### 3.5. További megfontolások

A büntetőpárbajok hirtelen halál szakasza a labdarúgó-mérkőzések egyik legizgalmasabb, leginkább kiélezett része. Ennek várható hossza a tizenegyesek rögzített  $p$  és  $q$  értékesítési valószínűsége mellett független a rúgási sorrendtől, azaz *Brams* és *Ismail* [2018] alapján:

$$EL = \frac{1}{p + q - 2pq}.$$

3. ábra. A hirtelen halál elérésének valószínűsége ötkörös büntetőpárbaj esetén



A hirtelen halál elérésének valószínűsége a 3. ábrán látható. Ez az  $ABBA$  és  $ABBA|BAAB$  szabályoknál azonos, amennyiben a  $p$  és  $q$  valószínűségek nem változnak az egyes körökben. Mivel a Változó kiegyenlítő és felzárkóztató mechanizmusok azonosak a Kiegyenlítővel és a Felzárkóztatóval a rögzített hosszúságú sza-

kaszban, a hirtelen halál elérésének valószínűségét nem befolyásolja az általunk javasolt módosítás. Ezek alapján a Kiegyenlítő szabály alkalmazása némileg, a Felzárkóztató pedig jelentősebb mértékben izgalmasabbá tehetné a büntetőpárbajokat.

A tárgyalt szabályokkal kapcsolatban felmerülő újabb kérdés lehet azok csalásbiztossága: előfordulhat-e, hogy egy tizenegyes szándékos kihagyásával valamelyik csapat összességében jobban jár? A determinisztikus mechanizmusokat biztosan nem lehet ilyen módon manipulálni, hiszen a büntetőrúgások sorrendje nem befolyásolható. A Felzárkóztató szabály esetén egy csapatnak hátrányba kell kerülnie a következő kör(ök)ben első rúgó pozíciójának megszerzéséhez, ami nem lehet optimális stratégia. Végül a Kiegyenlítő módszer akkor teljesíti a csalásbiztosság feltételét, ha  $(p - q) \leq 1/2$  teljesül (*Brams–Ismail* [2018]), ami a gyakorlatban szinte biztosan fennáll. A Változó kiegyenlítő és felzárkóztató szabályok nem manipulálhatók, amennyiben eredeti változatuk sem az.

#### 4. Összefoglalás

Az igazságosság és a méltányosság fogalma, a közgazdaságtan számos területéhez hasonlóan, a sportban is felmerülhet a szabályokkal szemben megfogalmazott követelményként.

Jelen munkában az igazságosság egy lehetséges értelmezéséből indultunk ki, miszerint azonos képességű csapatoknak ugyanolyan valószínűséggel kell megnyerniük a mérkőzést. A labdarúgásban a hosszabbítást követő esetleges büntetőpárbaj rúgási sorrendjét meghatározó szabály a döntéshozók által elfogadottan megsérti ezt a követelményt. Ezért hat alternatív mechanizmust hasonlítottunk össze egy matematikai modell segítségével, illetve empirikus alapokon. Közülük kettőt, melyek a második tizenegyes rúgó csapatot részesítik előnyben a hirtelen halál szakaszban, elsőként mi javasoltunk.

Számításaink szerint a Változó felzárkóztató szabály tűnik az igazságosság ezen fogalmához legközelebb állónak. Ezzel szemben a Kiegyenlítő módszert aligha célszerű alkalmazni, hiszen egyrészt nem sokkal jobb az egyszerűbb *ABBA* mechanizmusnál, másrészt egy egyszerű módosítással javítható a teljesítménye (Változó kiegyenlítő). A bemutatott empirikus eredmények alapján ugyan nem lehetünk biztosak abban, hogy a büntetőpárbajt kezdő csapat valóban szignifikáns előnyt élvez, az általunk tárgyalt valamely szabály használata azonban biztosan nem káros, hiszen részben képes kompenzálni az esetleges problémát, és talán a büntetőpárbajok jelentette izgalmakat is tovább növelné.

## Irodalom

- ANBARCI, N. – SUN, C.-J. – ÜNVER, M. U. [2015]: Designing fair tiebreak mechanisms: The case of FIFA penalty shootouts. *SSRN Electronic Journal*. January. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2558979>
- ANBARCI, N. – SUN, C.-J. – ÜNVER, M. U. [2018]: *Designing fair tiebreak mechanisms for sequential team contests*. Working Papers in Economics. No. 871. Boston College Department of Economics. Boston. <http://fmwww.bc.edu/EC-P/wp871.pdf>
- APESTEGUIA, J. – PALACIOS-HUERTA, I. [2010]: Psychological pressure in competitive environments: Evidence from a randomized natural experiment. *American Economic Review*. Vol. 100. No. 5. pp. 2548–2564. <http://dx.doi.org/10.1257/aer.100.5.2548>
- ARRONDEL, L. – DUHAUTOIS, R. – LASLIER, J. F. [2019]: Decision under psychological pressure: The shooter's anxiety at the penalty kick. *Journal of Economic Psychology*. Vol. 70. January. pp. 22–35. <http://dx.doi.org/10.1016/j.joep.2018.10.008>
- BRAMS, S. J. – ISMAIL, M. S. [2018]: Making the rules of sports fairer. *SIAM Review*. Vol. 60. No. 1. pp. 181–202. <http://dx.doi.org/10.1137/16M1074540>
- COHEN-ZADA, D. – KRUMER, A. – SHAPIR, O. M. [2017]: *Take a chance on ABBA*. Discussion Papers. No. 10878. IZA Institute of Labor Economics. Bonn. <http://ftp.iza.org/dp10878.pdf>
- COHEN-ZADA, D. – KRUMER, A. – SHAPIR, O. M. [2018]: Testing the effect of serve order in tennis tiebreak. *Journal of Economic Behavior & Organization*. Vol. 146. February. pp. 106–115. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jebo.2017.12.012>
- CSATÓ, L. [2013]: Ranking by pairwise comparisons for Swiss-system tournaments. *Central European Journal of Operations Research*. Vol. 21. No. 4. pp. 783–803. <http://dx.doi.org/10.1007/s10100-012-0261-8>
- CSATÓ, L. [2017]: On the ranking of a Swiss system chess team tournament. *Annals of Operations Research*. Vol. 254. Nos. 1–2. pp. 17–36. <http://dx.doi.org/10.1007/s10479-017-2440-4>
- CSATÓ, L. [2019]: *A comparison of penalty shootout designs in soccer*. arXiv: 1806.01114
- DA SILVA, S. – MIORANZA, D. – MATSUSHITA, R. [2018]: FIFA is right: The penalty shootout should adopt the tennis tiebreak format. *Open Access Library Journal*. Vol. 5. No. 3. pp. 1–23. <http://dx.doi.org/10.4236/oalib.1104427>
- ECHENIQUE, F. [2017]: ABAB or ABBA? *The arithmetics of penalty shootouts in soccer*. Technical Report. California Institute of Technology. Pasadena. <http://www.its.caltech.edu/~fede/wp/penales.pdf>
- EURONEWS [2018]: *Penalty shootouts are unfair. Here's how they could be fairer*. <http://www.euronews.com/2018/07/02/penalty-shootouts-are-unfair-here-s-how-they-could-be-fairer-view>
- FIFA (FÉDÉRATION INTERNATIONALE DE FOOTBALL) [2018]: *IFAB's 133<sup>rd</sup> Annual Business Meeting Recommends Fine-Tuning Laws for the Benefit of the Game*. 22 November. <https://www.fifa.com/about-fifa/who-we-are/news/ifab-s-133rd-annual-business-meeting-recommends-fine-tuning-laws-for-the-benefit>
- GONZÁLEZ-DÍAZ, J. – PALACIOS-HUERTA, I. [2016]: Cognitive performance in competitive environments: Evidence from a natural experiment. *Journal of Public Economics*. Vol. 139. July. pp. 40–52. <https://doi.org/10.1016/j.jpubeco.2016.05.001>

- IFAB (INTERNATIONAL FOOTBALL ASSOCIATION BOARD) [2018]: *Laws of the Game 2018/19*. Zurich. [http://static-3eb8.kxcdn.com/documents/662/133314\\_290518\\_LotG\\_18\\_19\\_EN\\_SinglePage\\_150dpi.pdf](http://static-3eb8.kxcdn.com/documents/662/133314_290518_LotG_18_19_EN_SinglePage_150dpi.pdf)
- KOCHER, M. G. – LENZ, M. V. – SUTTER, M. [2012]: Psychological pressure in competitive environments: New evidence from randomized natural experiments. *Management Science*. Vol. 58. No. 8. pp. 1585–1591. <http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.1120.1516>
- KNVB (KONINKLIJKE NEDERLANDSE VOETBALBOND) [2018]: *Reglement voor het toernooi om de TOTO KNVB Bekerseizoen 2018/19*. Zeist. <https://www.knvb.nl/downloads/sites/bestand/knvb/17621/reglement-toto-knvb-beker-seizoen-2018-19>
- KRUMER, A. – LECHNER, M. [2017]: First in first win: Evidence on schedule effects in round-robin tournaments in mega-events. *European Economic Review*. Vol. 100. November. pp. 412–427. <http://dx.doi.org/10.1016/j.eurocorev.2017.09.006>
- KRUMER, A. – MEGIDISH, R. – SELA, A. [2017]: First-mover advantage in round-robin tournaments. *Social Choice and Welfare*. Vol. 48. Issue 3. pp. 633–658. <http://dx.doi.org/10.1007/s00355-017-1027-y>
- MIRROR [2018]: *Luka Modric chose second penalty despite winning coin toss against Russia – but there's a theory on why he did*. 9 July. <https://www.mirror.co.uk/sport/football/news/luka-modric-chose-second-penalty-12883102>
- MTA SZTAKI (MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓINTÉZET) [2018]: *Hogyan tehető igazságosabbá a labdarúgó mérkőzéseket követő büntetőpárbaj?* Június 18. <https://www.sztaki.hu/tarsadalom/hirek/hogyan-teheto-igazsagosabbalabdarugo-merkozeseket-koveto-buntetoparbj>
- PALACIOS-HUERTA, I. [2012]: Tournaments, fairness and the Prouhet-Thue-Morse sequence. *Economic Inquiry*. Vol. 50. Issue 3. pp. 848–849. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1465-7295.2011.00435.x>
- PALACIOS-HUERTA, I. [2014]: *Beautiful Game Theory: How Soccer Can Help Economics*. Princeton University Press. Princeton. <http://dx.doi.org/10.23943/princeton/9780691144023.001.0001>
- RUDI, N. – OLIVARES, M. – SHETTY, A. [2019]: Ordering sequential competitions to reduce order relevance: soccer penalty shootouts. *SSRN Electronic Journal*. March. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3358682>
- THOMSON REUTERS [2017]: *New penalty system gets usual result as Germany win*. 12 May. <https://uk.reuters.com/article/uk-soccer-uefa-penalties-idUKKBN18730W>
- UEFA (UNION OF EUROPEAN FOOTBALL ASSOCIATIONS) [2017a]: *Comprehensive bidding regulations approved for all finals and final tournaments*. 1 June. [www.uefa.com/insideuefa/mediaservices/newsid=2474545.html](http://www.uefa.com/insideuefa/mediaservices/newsid=2474545.html)
- UEFA [2017b]: *Penalty shoot-out trial at UEFA final tournaments*. 1 May. <http://www.uefa.com/insideuefa/protecting-the-game/refereeing/news/newsid=2463576.html>
- UEFA [2018]: *Regulations of the UEFA European Football Championship 2018–20*. Nyon. [https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/54/36/05/2543605\\_DOWNLOAD.pdf](https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/54/36/05/2543605_DOWNLOAD.pdf)
- VANDEBROEK, T. P. – MCCANN, B. T. – VROOM, G. (2018): Modeling the effects of psychological pressure on first-mover advantage in competitive interactions: The case of penalty shoot-outs. *Journal of Sports Economics*. Vol. 19. No. 5. pp. 725–754. <http://dx.doi.org/10.1177/1527002516672060>

## Summary

In soccer, if a match remains undecided after the extra time, a penalty shootout decides which team advances to the next round. During this stage, a team chosen by a coin toss kicks the first penalty in each round, which leads to a significant advantage that is unfair and may harm efficiency. The authors present some alternative mechanisms for penalty shootouts and compare them by a mathematical model. The rule called “behind first, alternating order” which gives the first penalty to the team behind by scores, turns out to be the closest to the principle of equal treatment of equals. This design can be further improved through a modification suggested in the study.