Sztochasztikus járványterjedési modellek

Ferenci Tamás, tamas.ferenci@medstat.hu (mailto:tamas.ferenci@medstat.hu)

2020. június 18.

Miről lesz szó?

Járványterjedési modellek és a statisztika

- Elsőként bemutatom a hagyományos járványterjedési modelleket
- Ez nem statisztika, hanem analízis (diff. egyenletek)
- Bár a becslése már statisztika, de nem túl izgalmas
- Ami viszont jóval érdekesebb: a modellek kiterjesztése sztochasztikus irányba

Determinisztikus járványterjedési modellek

Járványterjedés modellezése

Járványok terjedését számos különböző típusú modellel igyekszünk leírni (a 20. század eleje óta)

- Kompartmentális modellek
- Mikroszimulációk (ágens-alapú modellek)
- Hálózatos modellek (gráfelmélet)

A (determinisztikus) kompartment modellek

- A legklasszikusabb megközelítés
- Az embereket homogén csoportokba, ún. kompartmentekbe osztjuk
- A kompartmentek létszámának időbeli változását követjük nyomon
- Felteszünk valamit arról, hogy egy kompartmentből hogyan lehet egy másik kompartmentbe átkerülni

A SIR-modell

- A leghíresebb, és legklasszikusabb példa
- Három kompartment: S (fogékony), I (fertőzött és fertőző), R (halott vagy gyógyult)
- Létszám időbeli alakulása: $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$
- Populáció nagysága: $N = S(t) + I(t) + R(t)$, időben állandónak vesszük (nincs “demográfia” vagy “vitális dinamika”)

A SIR-modell átmenetei

- $S \to I$ átmenet: mintha tökéletesen keverednének a csoportok egymással is – egy fertőzöttnek időegység alatt λ kontaktusa van, a tökéletes keveredés miatt ezek $\frac{S(t)}{N}$ hányada lesz fogékony, így $\lambda \frac{S(t)}{N}$ fertőzés átadására alkalmas kontaktus van, jelölje β a λ-nak és annak a valószínűségének a szorzatát, hogy egy kontaktuson tényleges fertőzés történik, ekkor $\beta \frac{S(t)}{N}$ fertőzést okoz egy fertőzött, $\beta \frac{S(t) I(t)}{N}$-t az összes (mivel időegység alatt, ez egy ráta!)
- $I \to R$ átmenet: mindenki, egymástól függetlenül γ rátával gyógyul

A SIR-modell formalizálása

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} &= -\beta\frac{S(t)I(t)}{N} \\
\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} &= \beta\frac{S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) \\
\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} &= \gamma I(t)
\end{aligned}
$$

A SIR-modell vizsgálata

Béta:

0 0.2 1

0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

Gamma:

0 0.1 1

0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

Kiterjesztési lehetőségek

A SIR-modellnek millióféle kiterjesztése van a determinisztikus gondolkodási keretben is:

- Vitális dinamika
- Fogalmilag új kompartment bevezetése (pl. E: fertőzött, de még nem fertőző, M: maternális immunitás védi)
- Ugyanolyan kompartmentből több egymás után kapcsolása, hogy az adott állapotban eltöltött idő ne exponenciális, hanem Erlang-eloszlású legyen
- A modell strukturálása, életkor, nem, területi egység stb. szerint

Az összesnél a klasszikus kompromisszum jön elő: a finomabb modellek jobban leírják a valóságot, de cserében több becsülendő paraméterük van

Az ilyen modellek bajai

- Determinisztikus
- Folytonos idejű
- Folytonos állapotterű
- Az új fertőzöttek száma nem jelenik meg explicite

Út a diszkrét, sztochasztikus modellek felé

Folytonos idő feloldása

Ez elég kézenfekvő:

$$S_{t+1} = S_t - \beta \frac{S_t I_t}{N}$$

$$I_{t+1} = I_t + \beta \frac{S_t I_t}{N} - \gamma I_t$$

$$R_{t+1} = R_t + \gamma I_t$$

(De az időlépés meghatározása nem nyilvánvaló!)

Sztochasztikussá tétel: egy kitérő (megfigyelési zaj)

- Igazából kreálhatunk sztochasztikus modellt a determinisztikus modell “tetején” is, ennek egy klasszikus példája a nem pontos megfigyelés
- Egy fertőzöttet csak p_r valószínűséggel jelentenek, de egy egy egészségest is p_m valószínűséggel fertőzöttként jelentenek
- Ekkor egy lehetséges modell: a teljes korábbi SIR plusz

$$I_t^{\text{jelentett}} \sim \mathcal{B}\text{in}\left(I_t, p_r\right) + \mathcal{B}\text{in}\left(N - I_t, p_m\right)$$

- (Igazából a dinamikát nem befolyásoltuk!)

“Valódi” sztochasztikussá tétel, a dinamikát is befolyásoljuk

Ötlet:

- Meghatározzuk (a rátából kiindulva), hogy *egy ember* mekkora valószínűséggel megy át egy másik kompartmentbe
- Az átmenő emberek száma pedig binomiális eloszlású legyen, az kiinduló kompartment méretével, és a fenti valószínűséggel mint paraméterekkel

Bónusz: ezzel *automatikusan* megkaptuk, hogy a modell diszkrét állapotterű (hiszen egész számból indulunk, és a fentiekke egész számot pakolunk át)

Ha λ a ráta, akkor az átmenetel valószínűsége $1 - e^{-\lambda}$

Egy példa

Például ($S \rightarrow I$): a $\beta \frac{S_t I_t}{N}$ össz-ráta azt jelenti, hogy egy fogékonyra – ugye ez a kiinduló kompartment! – $\beta \frac{I_t}{N}$ a ráta, így az átkerülő fogékonyak száma a fenti logika szerint:

$$\mathcal{B}\mathrm{in}\left(S_t, 1 - e^{-\beta \frac{I_t}{N}}\right)$$

Diszkrét sztochasztikus SIR modell

- Ezzel kész is vagyunk, minden a kezünkben van a szimuláláshoz
- Természetesen innentől a kapott eredmény már a véletlentől is függeni fog!
- (Lényegében egy sztochasztikus folyamatot specifikáltunk)

Sztochasztikus SIR modell szimulálása

Béta:

0 0.2 1

0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

Gamma:

0 0.1 1

0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

Szimulációk száma:

100

Becslés

- Gillespie algoritmus (1977)
- Monte Carlo módszerek, pl. IF2 (elborult matematika), `pomp` csomag az `R` alatt: http://kingaa.github.io/pomp/ (http://kingaa.github.io/pomp/)

Egy “igazibb” példa

https://research.physcon.uni-obuda.hu/COVID19MagyarEpi/ (https://research.physcon.uni-obuda.hu/COVID19MagyarEpi/)