A GOMPERTZ-FÜGGVÉNY FELHASZNÁLÁSI LEHETŐSÉGEI A DEMOGRÁFIAI MODELLEZÉSBEN

VALKOVICS EMIL

A tanulmány *Benjamin Gompertz* először 1825-ben publikált, híressé vált függvényét mutatja be, melynek eredeti rendeltetése a „halandóság ereje” fogalmának a halandóság elemzéséhez történő bevezetése volt. Tanulmányunk az eredeti Gompertz-formula megfelelő átalakításával újradefiniálja a halandósági tábla függvényeit, és példákkal szemlélteti a Gompertz-függvény megnövekedett felhasználási lehetőségeit az általános korspecifikus termékenységi arányszámok és ez utóbbiak kumulált értékei, a házas termékenység korspecifikus arányszámai, a legalább *i* számú gyermeket szült nőknek a paritás-specifikus termékenységi táblákon belüli száma, a belső vándorlás korspecifikus arányszámai, a halandósági tábla továbbélési függvénye és halálozási valószínűségei modellezésében. Bemutatja, hogy a Gompertz-függvény egyes esetekben kétszer, sőt háromszor is illeszthető az illeszkedés szorosságának növelése, illetve valamely több függvényből álló modellrendszer előállítása céljából. Alkalmazási lehetőségeinek illusztrálása főként az 1983. évi magyarországi adatok felhasználásával történt.

TÁRGYSZÓ: Gompertz-függvény. Halandóság. Demográfia modellezés.

Benjamin Gompertz angol aktuárius (biztosítási matematikus) 1825-ben publikálta először a halandósági tábla, a halandóság ereje (force of mortality), illetve intenzitása mutatójának fogalmát és korspecifikus értékei [$\mu(x)$] alakulását leíró exponenciális formuláját abból a meggondolásból kiindulva, hogy ez az „erő”, illetve intenzitás az életkorral mértani sor szerint növekszik. Szerinte

$$\mu(x) = -\frac{1}{l(x)} \cdot \frac{d}{dx} l(x) = -\frac{d}{dx} \ln l(x) = Bc^x,$$

ahol $l(x)$ az x éves korig továbbélők számát, $\frac{dl(x)}{dx}$ pedig az $l(x)$-nek az életkort szimbolizáló x szerinti differenciálhányadosát jelenti.

A $\mu(x) = Bc^x$ formulából adódik, hogy

$$\ln l(x) = -\int B \exp[x \ln c] dx = -\frac{B}{\ln c} c^x + \text{állandó},$$

ahol

$$-\frac{B}{\ln c} = \ln g,$$

vagyis $g = \exp\left(-\frac{B}{\ln c}\right)$ és az állandó = ln k. Ennek alapján

$$-B = \ln k \times \ln c \text{ és } B = -[\ln k \times \ln c],$$

vagyis $\mu(x) = Bc^x = -[\ln g \times \ln c]c^x$ és $\ln l(x) = c^x \ln g + \ln k$.

A továbbélők Gompertz-függvénnyel becsült száma:

$$\hat{l}(x) = kg^{c^x}$$

és

$$\hat{l}(x+1) = kg^{c^{x+1}}.$$

Ennek alapján a továbbélési valószínűség becsült értéke:

$$\hat{p}(x) = \frac{l(x+1)}{l(x)} = \frac{k\,g^{c^{x+1}}}{k\,g^{c^x}} = g^{c^x(c-1)},$$

a halálozási valószínűségé pedig:

$$\hat{q}(x) = 1 - \hat{p}(x) = 1 - g^{c^x(c-1)}.$$

Az egyes életkorokban előforduló halálozások becsült száma:

$$\hat{d}(x) = \hat{l}(x) - \hat{l}(x+1) = \hat{l}(x)\hat{q}(x) = k\left[g^{c^x} - g^{c^{x+1}}\right] = kg^{c^x}\left[1 - g^{c^x(c+1)}\right].$$

A halandósági táblabeli stacionér népesség becsült száma:

$$\hat{L}(x) = 0{,}5\left[\hat{l}(x) + \hat{l}(x+1)\right] = \frac{k}{2}\left[g^{c^x} + g^{c^{x+1}}\right].$$

A halandósági táblabeli korspecifikus halálozási arányszám:

$$\hat{m}(x) = \hat{d}(x)\big/\hat{L}(x) = \frac{2\left[g^{c^x} - g^{c^{x+1}}\right]}{c^x} = \frac{2\left(g^{c^x} - g^{c^{x+1}}\right)}{g^{c^x} + g^{c^{x+1}}}.$$

Az x éves kortól leélendő összes évek becsült száma:

$$T(x) = \sum_{\omega}^{x} L(x) = \frac{k}{2} \sum_{\omega}^{x} \left[g^{c^x} + g^{c^{x+1}} \right].$$

Az x éves korban várható átlagos élettartam becsült nagysága:

$$e^0(x) = T(x)/l(x) = \frac{\frac{k}{2}\left[g^{c^x} + g^{c^{x+1}} \right]}{k\, g^{c^x}}.$$

A $\mu(x)$ értéke közelítő pontossággal a

$$\mu(x) \approx -\frac{1}{2}\left[\ln \hat{p}(x-1) + \ln \hat{p}(x)\right]$$

formulával is meghatározható és koréves részletezésű halandósági tábla birtokában a $\mu(0)$, $\mu(1)$ és $\mu(2)$ értékének kivételével kiszámítható a

$$\mu(x) = \frac{8\left[l(x-1) - l(x+1)\right] - \left[l(x-2) - l(x+2)\right]}{12\, l(x)}$$

formula felhasználásával is. Hároméves korig $\mu(x)$ többnyire az $l(x)$ értékekhez illesztett hiperbola felhasználásával becsülhető (közelítő pontossággal).[1]

A demográfusok és aktuáriusok körében ismeretes, hogy Gompertz formuláját *Makeham* 1867-ben egy újabb állandó beiktatásával egészítette ki. A Gompertz–Makeham-formula szerint

$$\mu(x) = A + Bc^x$$
$$l(x) = k\, s^x\, g^{c^x}$$
$$p(x) = s\, c^{x(c-1)} \quad \text{stb.}$$

Gompertz eredeti formulájának csak két paramétere van, B és c. A halandóság erejének alakulását leíró görbe csak a születéstől a korai kamaszkori mélypontjáig és felnőttkori monoton jellegű emelkedésének a legfiatalabb életkortól kezdődően (a továbbélők teljes kihalásáig) alakul úgy, ahogyan azt szerzője leírta.

Az egyre növekvő tapasztalati anyag elemzése kapcsán az is egyértelművé vált, hogy az orvostudomány fejlődése, az egészségügyi rendszabályok és a morbiditást és mortalitást befolyásoló egyéb tényezők a különböző életkorúakat eltérő arányban érintik, ezért a különböző nemű és korú népesség halandóságának egymáshoz viszonyított nagysága állandóan változik, így a Gompertz- és a Gompertz–Makeham-formula sem alkalmas min

[1] Demonstrálását és gyakorlati alkalmazását lásd *J. H. Pollard* 1973-ban kiadott „Mathematical models for the growth of human populations” c. könyvében.

den esetben az említett korintervallumokon belül sem az emberi halandóság matematikai leírására. Leggyakrabban a halandósági tábla különböző függvényei empirikus értékeinek kiegyenlítésére, főleg pedig a legidősebb korúak halandóságának extrapoláció útján történő becslésére alkalmazzák, de felhasználják időnként a halandósági tábla egyes függvényei késői felnőtt- és öregkori értékeinek modellezésére is, amit tanulmányunk befejező részében illusztrálni is fogunk.

Az utóbbi években végzett matematikai–demográfiai kutatások egyik jelentős eredménye volt annak a kimutatása, hogy a Gompertz-függvény számos más demográfiai jelenség kor-, illetve tartamspecifikus arányszámainak és valószínűségeinek modellezésére is felhasználható. Ez utóbbiak közül a legjelentősebbek a következők.

1. Az általános korspecifikus termékenységi arányszámok indirekt modellezése.

2. Az alacsony szintű házas termékenység korspecifikus arányszámainak direkt és indirekt modellezése.

3. A magas szintű termékenységet leíró paritás-specifikus termékenységi táblák különböző függvényeinek direkt és indirekt modellezése.

4. A belső vándorlás korspecifikus arányszámai egyes korintervallumokon belüli értékeinek direkt és indirekt modellezése, továbbá számos más olyan adatsor modellezése, melyek esetében a Gompertz-függvény más függvényekkel történő egyidejű alkalmazása útján állítható elő a kívánt matematikai modell.

Az általános korspecifikus termékenységi arányszámok indirekt modellezésének a Gompertz-görbe illesztésén alapuló egyik módszere

Az elméleti görbék illesztése az általános korspecifikus termékenységi arányszámok empirikus értékeihez rendszerint közvetlen, direkt módszerrel történik, melynek során az arányszámok semmiféle előzetes átalakítására nem kerül sor. Az általános korspecifikus termékenységi arányszámok modellezése azonban úgy is megvalósítható, hogy az arányszámokat előzetesen valamilyen transzformációnak vetjük alá és a transzformált arányszámokhoz illesztünk valamilyen ismert módszerrel (a momentumok módszerével, a maximum likelihood módszerrel, a legkisebb négyzetek módszerével stb.) valamilyen jól illeszkedő függvényt. E függvény helyettesítési értékein azután végrehajtjuk az ellentétes irányú transzformációt. Ha e transzformáció eredményei jól illeszkednek az általános korspecifikus termékenységi arányszámok tényleges értékeihez, az eljárás egészét az arányszámok indirekt modellezési módszerének fogadhatjuk el.

Esetünkben az indirekt módszer alkalmazása során az általános korspecifikus termékenységi arányszámok tényleges értékeit [$f_Y(y)$] előzetesen 15 éves kortól 50 éves korig kumulatív módon összegezzük. A szülőképes (propagatív) kor kezdetétől kumulált transzverzális általános korspecifikus termékenységi arányszámok modellezését ezután a Gompertz-görbe felhasználásával valósítjuk meg. Az arányszámok indirekt módon becsült értékeit (a Gompertz-görbe szomszédos helyettesítési értékeinek különbségeit) egybevetjük az arányszámok tényleges értékeivel: kiszámítjuk eltérésnégyzeteik összegét és az illeszkedés szorosságát mutató korrelációs index értékét. A Gompertz-görbe egyenletének egyik általánosan elterjedt megadási módja a halandósági tábla továbbélési függvényére vonatkozó változatának analógiájára előállított, de a szóban forgó jelenség különbözősége miatt más betűk használatával felírt $f_Y(y) = c\,a^{b^y}$ egyenlet, melyben y az életkort jelzi.

A kumulált általános korspecifikus termékenységi arányszámok esetében $\ln a < 0$, $a < 1$ és $b < 1$. A Gompertz-görbe illesztése, paraméterei előállításának egyik leg egyszerűbb módja az ún. részösszegek módszerének az alkalmazása. E módszer alkalmazása során – mint azt *F. C. Mills*, *F. E. Croxton* és *D. J. Cowden*, *G. J. Wunsch*, *E. M. Murphy* és *D. N. Nagnur*, *S. M. Farrid* és *W. Brass* is kimutatta, a rendelkezésünkre álló adatokat előbb három egyenlő csoportra célszerű felosztanunk, majd ki kell számítanunk mindhárom csoport adatai természetes logaritmusainak az S_1, S_2 és S_3 szimbólumokkal jelölhető összegét. Kimutatható, hogy

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i = n \ln c + b(\ln a)\frac{b^n - 1}{b-1},$$

$$S_2 = \sum_{i=n+1}^{2n} \ln y_i = n \ln c + b^{n+1}(\ln a)\frac{b^n - 1}{b-1},$$

$$S_3 = \sum_{i=2n+1}^{3n} \ln y_i = n \ln c + b^{2n+1}(\ln a)\frac{b^n - 1}{b-1}.$$

A Gompertz-függvény a, b és c paraméterének értékét ezután az alábbi formulák felhasználásával becsüljük:

$$b^n = \frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1}; \qquad b = \left(\frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1}\right)^{1/n}$$

$$\ln a = \left[\frac{(b-1)(S_2 - S_1)}{b(b^n - 1)^2}\right]; \qquad a = \exp\left[\frac{(b-1)(S_2 - S_1)}{b(b^n - 1)^2}\right]$$

$$\ln c = \frac{1}{n}\left(\frac{S_1 S_3 - S_2^2}{S_1 + S_3 - 2S_2}\right); \qquad c = \exp\left[\frac{1}{n}\left(\frac{S_1 S_3 - S_2^2}{S_1 + S_3 - 2S_2}\right)\right].$$

Esetünkben 35 adathoz kell a Gompertz-függvényt illesztenünk. Az adatok n-nel jelzett száma az egyes adatcsoportokban ezért (35 – 2)/3 = 11, ha a két utolsó adatot elhanyagoljuk.

Az általános korspecifikus termékenységi arányszámok egyes korévekre vonatkozó becsült értékeit a kumulált tényleges értékeikhez illesztett Gompertz-görbe segítségével úgy számítjuk ki, hogy

– kiszámítjuk a Gompertz-görbe helyettesítési értékeit;

– az egyes helyettesítési értékeket kivonjuk az utánuk következő, egy évvel magasabb életkorra vonatkozó helyettesítési értékekből.

Minthogy esetünkben a Gompertz-függvénynek a halandósági tábla továbbélési függvényének modellezésére szolgáló változatát, vagyis az $\hat{l}(x) = k\, g^{c^x}$ háromparaméteres formula analógiájára készült

$$\sum_{y=15}^{y} f_Y(y) = c\, a^{b^y}$$

formulát használtuk, a korspecifikus termékenységi arányszámok e függvény segítségével becsült szomszédos kumulált értékeinek különbségei, vagyis maguk az indirekt módon becsült általános korspecifikus termékenységi arányszámok az

$$\hat{f}_Y(y) = c\left[a^{b^y} - a^{b^{y+1}}\right] = c\,a^{b^y}\left[1 - a^{b^y(b-1)}\right]$$

formulákkal is kiszámíthatók.

A Gompertz-görbe szomszédos helyettesítési értékei különbségeként, vagy másként előállított, indirekt módon becsült általános korspecifikus termékenységi arányszámok értékeit ezen arányszámok tényleges értékeivel – mint jeleztük – eltérésnégyzeteik összegének kiszámítása útján vetjük egybe. Ezután kerülhet sor a korrelációs index értékének kiszámítására.

Az 1983. évi magyarországi korspecifikus termékenységi arányszámok kumulált értékeihez illesztett Gompertz-függvény esetében $S_1 = 15{,}54297463$; $S_2 = 4{,}692052245$ és $S_3 = 6{,}070843150$, s ebből adódóan a paraméterek értéke:

$$a = 0{,}001587702;\ b = 0{,}783330372;\ c = 1{,}752529518,$$

az illesztett függvény tehát, annak figyelembevételével, hogy az első helyettesítési érték a 16 éves kor (16 – 15 = 1)

$$c\,a^{b^{(y-15)}} = 1{,}752529518 \times 0{,}001587702^{0{,}783330372^{(y-15)}}.$$

A Gompertz-görbe felhasználásán alapuló modellezési módszernek az 1983. évi magyarországi termékenységi adatok alapulvételével történő alkalmazását bemutató 1. ábrából és a Melléklet[2] 1. táblájából egyaránt kitűnik, hogy az illesztett görbe az arányszámok kumulált értékeit a szülőképes kor fiatalabb éveiben némileg alulbecsli, idősebb éveiben pedig némileg túlbecsli. Az egyes korévekre vonatkozó indirekt becslési eredmények ezzel összhangban kezdetben szintén alulbecsültek, később túlbecsültek; az alulbecslés, illetve a túlbecslés mértéke azonban nem számottevő, a Gompertz-görbe felhasználása egészében véve elfogadható pontosságúnak mondható direkt és indirekt becslési eredményeket ad. Megjegyezzük egyébként, hogy a becslési hibák jellege ugyanilyen számos más indirekt módszer alkalmazása esetében is, mértéke azonban esetenként különböző.

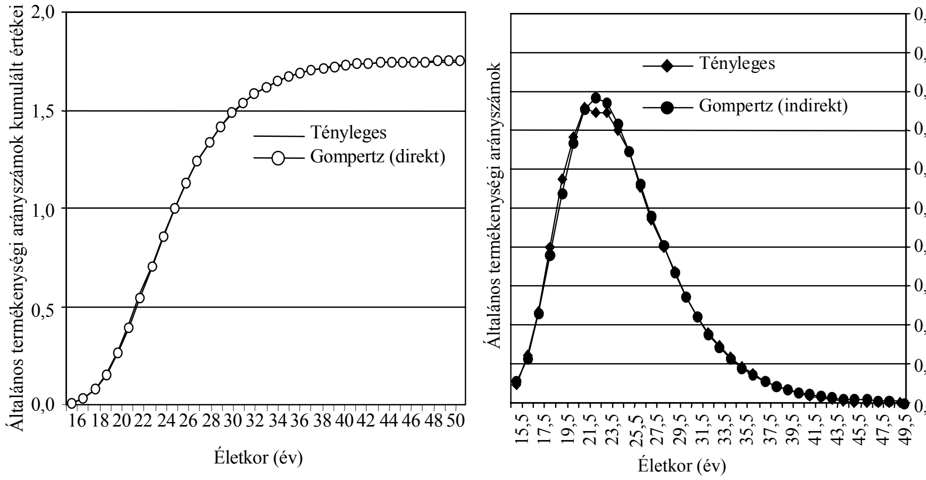
A Gompertz-görbe segítségével történő modellezés lehetőséget nyújt arra is, hogy valamely még befejezetlen termékenység befejeződését előrebecsüljük.[3] Ez különösen azoknak a szerzőknek a munkáiból derül ki, akik a Gompertz-görbét női születési évjáratok termékenységének indirekt modellezésére használták (*G. J. Wunsch*, *S. M. Farrid*, *W. Brass* stb.). Transzverzálisan becsült általános korspecifikus termékenységi arányszámok Gompertz-görbe felhasználásán alapuló indirekt modellezése során legfeljebb a görbe paramétereinek felhasználásán alapuló transzverzális jellegű termékenységelőreszámítás válik egyes esetekben lehetővé.

[2] A Melléklet csak elektronikus formában készült. E szám megjelenésével egyidőben a Melléklet megtekinthető és díjmentesen letölthető a www.ksh.hu/statszml honlapról.

[3] Továbbra is a részösszegek módszerét alkalmazva $3\times11=33$ adat felhasználása helyett némi engedmények árán $3\times10=30$, $3\times9=27$ stb. adat felhasználását is elfogadhatónak tekinthetjük.

A termékenységi arányszámoknak a Gompertz-görbe felhasználásán alapuló indirekt modellezése a legrégebben ismert indirekt modellezési eljárás. A többi indirekt módszer nemcsak „fiatalabb”, hanem közös sajátossága az is, hogy felhasználása során többnyire szerephez jut benne az előzetesen transzformált általános korspecifikus termékenységi arányszámok polinomiális approximációja is.

1. ábra. Az általános korspecifikus termékenységi arányszámok indirekt modellezése a kumulált értékeikhez illesztett Gompertz függvény segítségével



A Gompertz-függvény illeszkedésének szorosságát a korrelációs index felhasználásával mértük. Ez utóbbi ismert formulája:

$$I = \sqrt{1 - \frac{\Sigma\left[f_Y(y) - \hat{f}_Y(y)\right]^2}{\Sigma\left[f_Y(y) - \overline{f}_Y(y)\right]^2}},$$

melyben $\Sigma\left[f_Y(y) - \hat{f}_Y(y)\right]^2$ a tényleges és az illesztett modell felhasználásával becsült általános korspecifikus termékenységi arányszámok közötti eltérések négyzeteinek összegét, $\sum\left[f_Y(y) - \bar{f}_Y(y)\right]^2$ pedig az általános korspecifikus termékenységi arányszámok tényleges értékei és az utóbbiak súlyozatlan aritmetikai átlaga közötti különbségek négyzeteinek összegét jelenti. Esetünkben I = 0,99883, ami a Gompertz-függvény igen jó illeszkedéséről tanúskodik.

Az általános korspecifikus termékenységi arányszámok Gompertz-függvény felhasználásával történő indirekt modellezésének egy másik módszere

A demográfiában számos olyan adatsorral találkozunk, mely kizárólag pozitív számokból áll. A halandósági tábla továbbélési függvénye (kihalási rendje), az általános korspecifikus termékenységi arányszámok, a házas termékenység korspecifikus arányszá mai, a legalább i számú gyermeket szült nők száma a paritás-specifikus termékenységi táblákban, a belső vándorlás korspecifikus arányszámai és számos más adatsor kizárólag pozitív számokból áll. Ezek az adatsorok többek között úgy is felírhatók, illetve reprodukálhatók, hogy: *1.* kiválasztunk egy adatot a modellezni kívánt adatsorból, és ezt hatványalapnak tekintjük; *2.* előállítjuk a hatványkitevőknek azt a sorozatát, mely az adatsorban szereplő számok természetes logaritmusának és a hatványalapnak tekintett szám természetes logaritmusának hányadosaiból áll.

Az ezer nőre jutó élveszületések évi számaként értelmezett általános korspecifikus termékenységi arányszámok kumulált értékei az

$$\left[\sum_{15}^{50} 1000\, f_Y(y)\right]^{\left[\ln \sum_{15}^{y} 1000 f_Y(y) / \ln \sum_{15}^{50} 1000 f_Y(y)\right]}$$

formulával is leírhatók, illetve reprodukálhatók, melyben $\sum_{15}^{50} 1000\, f_Y(y)$ a teljes termékenységi arányszám (Total Fertility Rate – TFR), vagyis a korspecifikus termékenységi arányszámok összegének értéke, $\sum_{15}^{y} 1000\, f_Y(y)$ pedig ezeknek az arányszámoknak a szülőképes kor alsó határától y éves korig kumulált értéke ($15 < y < 50$). (Ebben és az ehhez hasonló többi esetben egy egynemű azonosságról van szó, hiszen általában

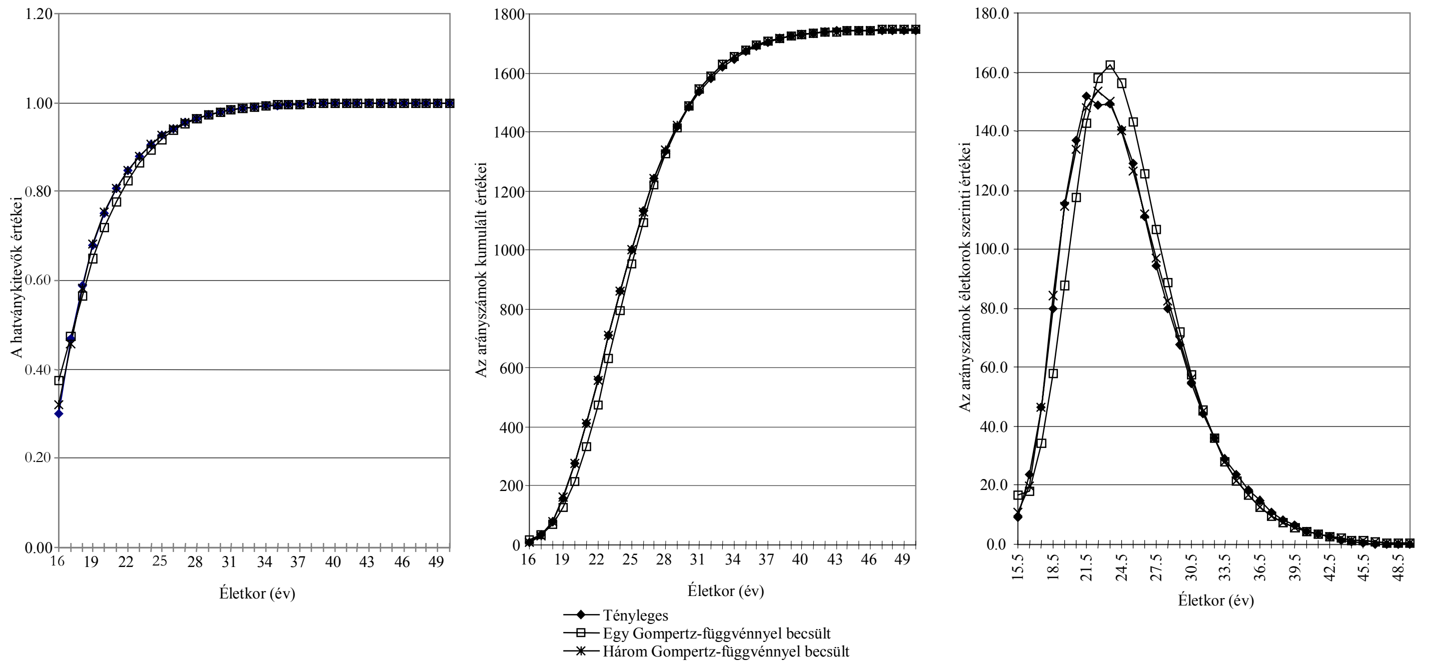
$$a^{\ln y / \ln a} = y, \text{ mert } (\ln y / \ln a) \cdot \ln a = \ln y.)$$

A hatványkitevők sorozata számos esetben több függvény felhasználásával (illesztésével) is modellezhető. Monoton jelleggel növekvő, illetve csökkenő sorozatok esetében igen gyakran bizonyul jól illeszkedőnek a Gompertz-függvény is.[4]

A 2. ábra csupán azt szemlélteti, hogy az e kutatási jelentésben bemutatott módszerek egyike, mely azonos a dolgozatunkban javasolt módszerrel, jelentősen továbbfejleszthető azáltal, hogy a hatványkitevők sorozatához nemcsak egy, hanem két vagy ennél is több Gompertz-függvényt illesztünk. (Lásd még a Mellékletben a 2. táblát.) A hatványkitevők bemutatott sorozatához a részösszegek módszerével illesztett három Gompertz-függvény tanúsítja, hogy az illesztett Gompertz-függvények számának növekedésével nemcsak a termékenységi modell paramétereinek száma nő, hanem jelentősen nő az illeszkedés szorossága is, ami egyébként magától értetődő. A korrelációs index értéke csupán egy Gompertz-függvény illesztése esetében $I =$ 0,98387, három Gompertz-függvény illesztése esetében pedig $I =$ 0,99932. A harmadik Gompertz-függvényt illesztjük először. Ezt követően illesztjük a második és az első Gompertz-függvényt. Ez utóbbiakat az általános korspecifikus termékenységi arányszámok 1983. évi ezer nőre számított kumulált értékeinek a tényleges és már modellezett értékei közötti különbségekhez illesztjük.

[4] Az általános korspecifikus termékenységi arányszámok kumulált értékeinek összes eddig kidolgozott modellezési lehetőségeiről e dolgozat szerzője *G. J. Wunsch* professzorral társszerzőként tett közzé kutatási jelentést. Lásd: *Some possibilities of modelling the cumulated values of general age-specific fertility rates*. (1995) Working Paper, 178. sz. Institut de Démographie de l'Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Edition Academia.

2. ábra. Az 1983. évi magyarországi általános korspecifikus termékenységi arányszámok tényleges és becsült kumulált és életkorok szerinti értékei



A Gompertz-függvény más függvényekkel egyidejű alkalmazása az általános korspecifikus termékenységi arányszámok matematikai modelljének előállítása során

Az általános korspecifikus termékenységi arányszámok mint láttuk, az

$$f_Y(M)^{\left[\ln f_y(y)/\ln f_y(M)\right]}$$

formulával is leírhatók, illetve reprodukálhatók, melyben $f_Y(M)$ a modális (a legnagyobb) korspecifikus termékenységi arányszám értékét, $f_Y(y)$ pedig (az életkort y-nal jelölve) a többi általános korspecifikus termékenységi arányszám értékét jelenti.

A 3. ábra a magyarországi általános korspecifikus termékenységi arányszámoknak a fenti transzformáción alapuló modellezését mutatja be. (Lásd még a Mellékletben a 3. táblát.) Az eljárás szemléltetésének céljára az 1983. évi általános korspecifikus termékenységi arányszámokat választottuk ki, mert a KSH Népességtudományi Kutató Intézetében ezekhez az adatokhoz illesztettük a legtöbb termékenységi modellt. Az egyéb modellezési eljárásokkal való egybevetés legnagyobb lehetőségeit tehát ennek az évnek a kiválasztása biztosítja.

A tényleges $\left[\ln f_Y(y)/\ln f_Y(M)\right]$ értékekhez először negyedfokú polinomot illesztettünk az ortogonális polinomok módszerével, amit az abszcissza értékek (az életkorok) ekvidisztans (egyenlő távolságú) jellege tett lehetővé. Az ezen első közelítés eredményeként előállított termékenységi modell tehát az

$$f_Y(y) = f_Y(M)^{\left(d_0 + d_1 y + d_2 y^2 + d_3 y^3 + d_4 y^4\right)}$$

formulával adható meg, illetve írható le, melyben y, mint jeleztük, az életkort jelzi.

A hatványkitevők tényleges értékeihez ezután (második kísérletként) Gompertz-függvényt és egy egyszerű exponenciális függvényt illesztettünk. Először az egyszerű exponenciális függvényt illesztettük, ezt követően került sor a tényleges és az egyszerű exponenciális függvény segítségével becsült értékek különbsége modellezésének céljából a Gompertz-függvény illesztésére. Az így előállított termékenységi modell az

$$f_Y(y) = f_Y(M)^{\left[c_1 a_1^{b_1^{(y-14,5)}} + d\exp(gy)\right]}$$

formulával adható meg, illetve írható le.

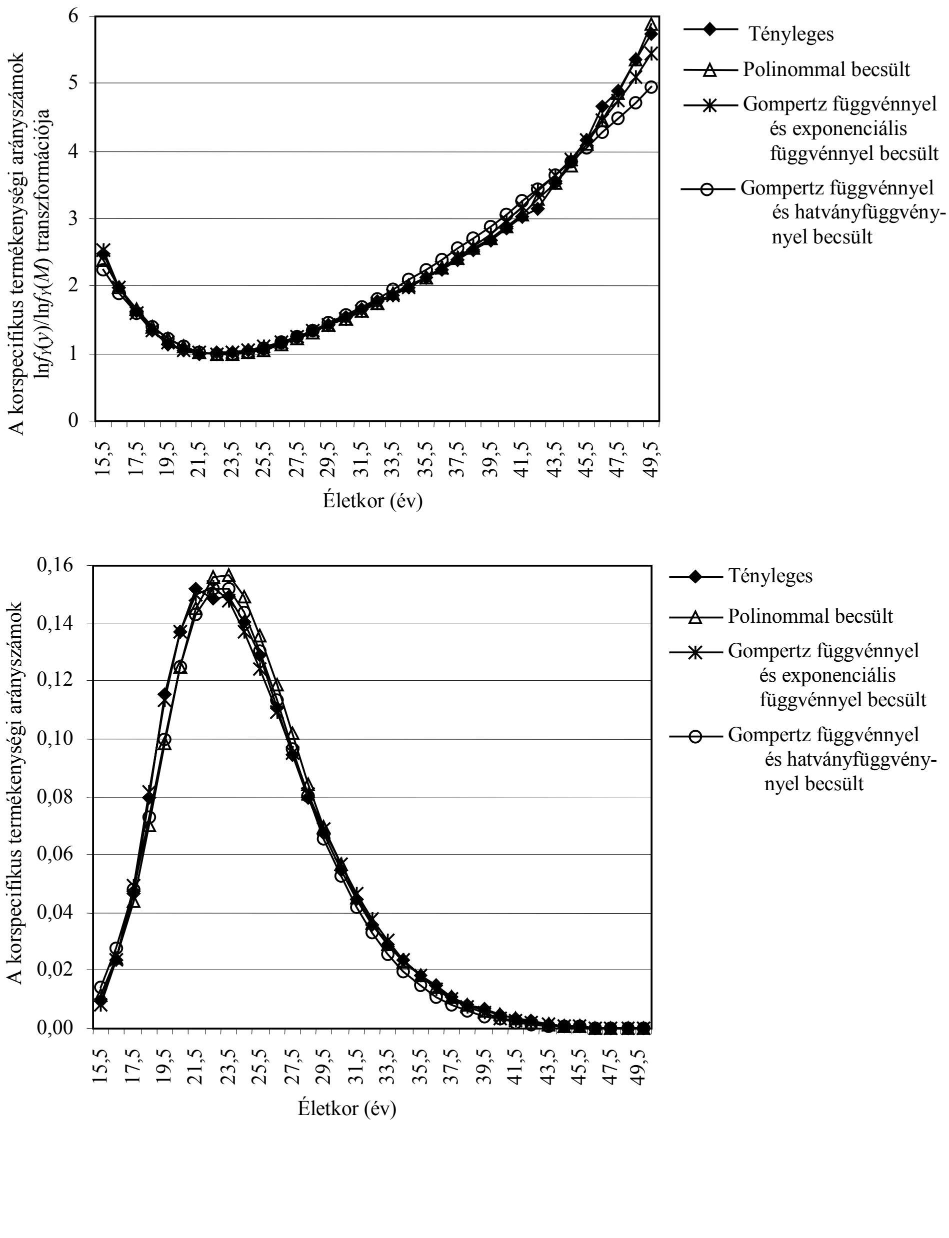
Az egyszerű exponenciális függvény illesztése a legkisebb négyzetek módszerével, a Gompertz-függvény illesztése pedig, ebben az esetben is a részösszegek módszerének felhasználásával történt.

A hatványkitevők tényleges értékeit ezután (harmadik közelítés) Gompertz-függvény és hatványfüggvény felhasználásával modelleztük. Először a hatványfüggvényt illesztettük, majd a tényleges és a hatványfüggvény segítségével becsült értékek különbségeihez Gompertz-függvényt illesztettünk. Az így előállított termékenységi modell:

$$\hat{f}_Y(y) = f_Y(M)^{\left[c_2 a_2^{b_2^{(y-14,5)}} + k y^h\right]}.$$

A legszorosabb illeszkedés a három felsorolt esetben a Gompertz-függvény és az egyszerű exponenciális függvény illesztése útján volt elérhető ($I = 0{,}99945$), amit a hatványkitevők tényleges értékeinek Gompertz-függvény és hatványfüggvény illesztése útján történő modellezése követett ($I = 0{,}99636$). Kielégítően magas volt azonban az illeszkedés szorossága a hatványkitevők tényleges értékeinek negyedfokú ortogonális polinommal történő modellezése esetében is ($I = 0{,}99515$).

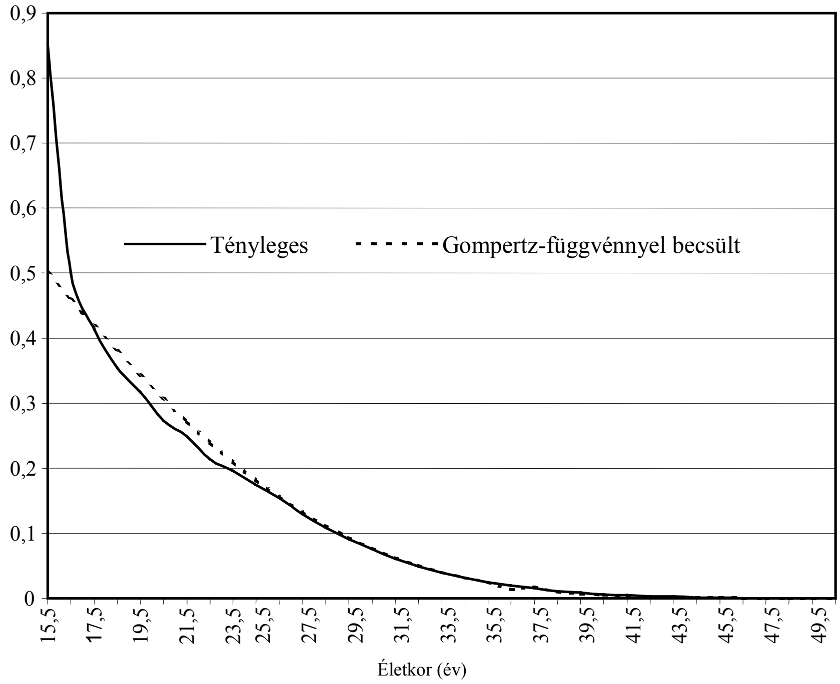
3. ábra. Az 1983. évi magyarországi általános korspecifikus termékenységi arányszámok tényleges és indirekt módon becsült értéke



Az alacsony szintű házas termékenység korspecifikus arányszámainak direkt és indirekt modellezése

A házas termékenység korspecifikus arányszámainak már több matematikai modelljét sikerült eddig előállítani. E dolgozat szerzője az alacsony szintű magyarországi házas termékenység életkor szerinti alakulását leíró eddig publikált arányszámait a béta függvény, a Gompertz-függvény és negyedfokú ortogonális polinomok segítségével már korábban is sikeresen modellezte (1984). Ennek az 1983. évi adatok felhasználásával előállított eredményeit a 4. ábra mutatja be. (Lásd a Mellékletben a 4. táblát.)

4. ábra. A házas termékenység 1983. évi magyarországi korspecifikus arányszámainak direkt modellezése Gompertz-függvény segítségével



A magas szintű termékenységet leíró paritás-specifikus termékenységi táblák különböző függvényeinek direkt és indirekt modellezése

A családnövekedési, illetve gyermekszám-növekedési valószínűségek ismert fogalmát csaknem egyidejűleg *L. Henry* francia és *N. B. Ryder* amerikai demográfus vezette be a demográfiába. A paritás-specifikus termékenységi táblák e fogalom felhasználásán alapuló előállítása *G. Feichtinger* és *W. Lutz* osztrák demográfus nevéhez fűződik. Henry a családnövekedési valószínűségek fogalmát és kiszámítási módját 1972-ben kiadott „Démographie, Analyse et Modèles” című könyvében az 1888–1890-ben 20–21 éves korukban házasodott norvégiai nők gyermekszám szerinti megoszlásából kiindulva világítja meg. Lutz a paritás-specifikus termékenységi tábla halandósági tábla analógiájára konstruált utolsó változatát „Distributional aspects of human fertility” című munkájában a kenyai kohorsz-termékenységi adatok felhasználásával mutatja be.

A paritás-specifikus termékenységi táblák első oszlopa a született gyermekek lehetséges születési sorszámát (i) sorolja fel, következő oszlopa pedig a legalább i számú gyermeket szült nők számát (F_i) tartalmazza. (Lásd az 1. táblát. A tábla ettől az elméleti sémától annyiban tér el, hogy tartalmaz becsült adatokat is.)

Azt ezt követő oszlop a pontosan i számú gyermeket szült nők számát adja meg ($N_i = F_i - F_{i+1}$), a következő oszlop pedig a gyermekszámnövekedési valószínűségek értékét, vagyis azokat a valószínűségeket, hogy az i számú gyermeket szült nők megszülik $i + 1$ sorszámú gyermeküket is ($a_i = F_{i+1}/F_i$). Ennek komplementer értéke, vagyis annak a valószínűsége, hogy az eggyel magasabb sorszámú gyermek már nem születik meg $\left[1 - a_i = 1 - \left(F_{i+1}/F_i\right)\right]$ nem minden esetben szerepel a paritás-specifikus termékenységi táblákban. Könnyen belátható, hogy $N_i = F_i - F_{i+1} = F_i\left(1 - a_i\right)$. Az a_0, a_1, a_2 stb. szimbólumokkal jelzett gyermekszám-növekedési valószínűségek alsó indexei eggyel kisebbek, mint ahányadik gyermek megszületésének valószínűségét jelzik: a_0 az első, a_1 a második, a_2 a harmadik stb. gyermek megszületésének valószínűségét jelenti.

A paritás-specifikus termékenységi táblák következő oszlopában szereplő adatok az F_i értékeknek az F_0 értékkel alkotott hányadosai (F_i/F_0), amit *Ryder* (1982) az i születési sorszámú gyermekekre vonatkozó teljes termékenységi arányszámnak nevez, ezek a különböző születési sorszámú gyermekek egy nőre jutó átlagos számát jelentik. Az ezt követő oszlop az i és i-nél magasabb születési sorszámú gyermekekre vonatkozó teljes termékenységi arányszám értékeit tartalmazza. (A halandósági táblában ezek lennének a T_x/l_0 értékek.)

A paritás-specifikus termékenységi táblák utolsó oszlopa azt mutatja be, hogy átlagosan hány gyermek születése várható még, ha az i születési sorszámú gyermek már megszületett. Értékei az i és i-nél magasabb születési sorszámú gyermekekre vonatkozó teljes termékenységi arányszám értékeinek a különböző születési sorszámú gyermekek egy nőre jutó számával (F_i/F_0) történő elosztása útján állíthatók elő.

A paritás-specifikus termékenységi tábla különböző függvényeinek modellezése legsikeresebben a legalább i számú gyermeket szült nők számát (F_i) tartalmazó oszlop adatainak direkt vagy indirekt modellezése és az eredményül kapott matematikai modell a többi mutató értékeinek kiszámítására történő felhasználása útján valósítható meg. A paritás-specifikus táblák F_i értékeihez, vagyis második oszlopának értékeihez direkt módon, és az F_i értékek különféle matematikai transzformációi után is sikeresen illeszthetünk Gompertz-függvényt (és természetesen más függvényeket is). Az 1. és a 2. tábla az 1888–1890-ben 20–21 éves korukban házasodott norvégiai nők gyermekszám szerinti megoszlásának adatainak felhasználásával előállított paritás-specifikus termékenységi tábla a legalább i számú gyermeket szült nők számát (F_i) tartalmazó (2) oszlopának adataihoz a részösszegek módszerével direkt módon és indirekt módon illesztett Gompertz-függvénnyel végzett modellezés eredményeit mutatja be. A tábla minden függvényének tényleges értékeit tartalmazó oszlopokat a becsült értékeket tartalmazó oszlopok követik az eltérésnégyzetek összegének és az illeszkedés szorosságának feltüntetésével. Az F_i értékek modellezése során az F_0 értéktől eltekintettünk, minthogy legalább 0 gyermeket a példánkban szereplő nők mindegyike szült. A Gompertz-függvény illesztése során 15 adatot vettünk figyelembe: n=15/3=5.

1. tábla

Az 1888 és 1890 között 20–21 éves korukban házasodott norvég nők paritás-specifikus termékenységi táblája függvényeinek tényleges és becsült értékei

Születési sorszám i	A legalább i sorszámú gyermeket szült nők		A pontosan i sorszámú gyermeket szült nők		A családnövekedési valószínűségek		Az egy nőre jutó élveszületések születési sorszám szerinti		Az i és nagyobb sorszámú születésekre vonatkozó teljes termékenységi arányszámok		Az i születési sorszám elérése után még várható születésszám	
	tényleges	becsült	tényleges	becsült	tényleges	becsült	tényleges	becsült	tényleges	becsült	tényleges	becsült
	száma		száma		értékei		száma		értéke		száma	
	F_i	$\hat{F}_i^*$	$F_i - F_{i+1}$	$\hat{F}_i - \hat{F}_{i+1}$	a_i	$\hat{a}_i$	$\overline{e}^{(i)}$	$\hat{\overline{e}}^{(i)}$				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
0	1000	1000	27	30	–	–	–	–	7,266	7,310	7,266	7,310
1	973	970	28	34	0,973	0,970	0,973	0,970	6,293	6,340	6,468	6,536
2	945	936	41	42	0,971	0,965	0,945	0,936	5,348	5,404	5,659	5,774
3	904	894	69	52	0,957	0,955	0,904	0,894	4,444	4,510	4,916	5,045
4	835	842	70	65	0,924	0,942	0,835	0,842	3,609	3,668	4,322	4,356
5	765	777	72	77	0,916	0,923	0,765	0,777	2,844	2,891	3,718	3,721
6	693	700	89	91	0,906	0,901	0,693	0,700	2,151	2,191	3,104	3,130
7	604	609	94	101	0,872	0,870	0,604	0,609	1,547	1,582	2,561	2,598
8	510	508	108	109	0,844	0,834	0,510	0,508	1,037	1,074	2,033	2,114
9	402	399	109	108	0,788	0,785	0,402	0,399	0,635	0,675	1,580	1,692
10	293	291	120	99	0,729	0,729	0,293	0,291	0,342	0,384	1,167	1,320
11	173	192	80	81	0,590	0,660	0,173	0,192	0,169	0,192	0,977	1,000
12	93	111	46	57	0,538	0,578	0,093	0,111	0,076	0,081	0,817	0,730
13	47	54	28	33	0,505	0,486	0,047	0,054	0,029	0,027	0,617	0,500
14	19	21	9	15	0,404	0,389	0,019	0,021	0,010	0,006	0,526	0,286
15+	10	6	10	6	0,526	0,286	0,010	0,006	–	–	–	–
Összesen	–	–	1000	1000	–	–	7,266	7,310	–	–	–	–
Az eltérésnégy–zetek összege		1228	–	1080	–	0,065246	–	0,001228	–	0,025459	–	0,161537
Az illeszkedés szorossága (I)		0,99970	–	0,97223	–	0,93849	–	0,99966	–	0,99985	–	0,99885

$^* \hat{F}_i = 1082{,}855287 \times 0{,}919575058^{(1{,}316734372^{i})}$.

Megjegyzés. A becsült értékeket a legalább *i* sorszámú gyermeket szült nők számához illesztett Gompertz-függvény szolgálja.

2.tábla

Az 1888–1890 között 20–21 éves korukban házasodott norvég nők paritás–specifikus termékenységi táblája függvényeinek tényleges és becsült értékei

Születési sor–szám i	F_i	A tényleges	A becsült	$\hat{F}_i^*$	A pontosan i sorszámú gyermeket szült nők		A családnövekedési valószínűségek		Az egy nőre jutó élveszületések születési sorszám szerinti		Az i és nagyobb sorszámú születésekre vonatkozó teljes termékenységi arányszámok		Az i születési sorszám elérése után még várható születésszám	
		$\ln F_i / \ln F_0$ érékek			tényleges	becsült	tényleges	becsült	tényleges	becsült	tényleges	becsült	tényleges	becsült
					száma		értékei		száma		értéke		száma	
					$F_i - F_{i+1}$	$\hat{F}_i - \hat{F}_{i+1}$	a_i	$\hat{a}_i$	$\bar{e}^{(i)}$	$\hat{\bar{e}}^{(i)}$				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
0	1000	1,00000	1,00000	1000	27	48	–	–	–	–	7,266	7,293	7,266	7,293
1	973	0,99604	0,99289	952	28	24	0,973	0,952	0,973	0,952	6,293	6,341	6,468	6,661
2	945	0,99181	0,98912	928	41	34	0,971	0,975	0,945	0,928	5,348	5,413	5,659	5,833
3	904	0,98539	0,98382	894	69	45	0,957	0,963	0,904	0,894	4,444	4,519	4,916	5,055
4	835	0,97390	0,97638	849	70	58	0,924	0,950	0,835	0,849	3,609	3,670	4,322	4,323
5	765	0,96122	0,96598	791	72	76	0,916	0,932	0,765	0,791	2,844	2,879	3,718	3,640
6	693	0,94691	0,95148	715	89	93	0,906	0,904	0,693	0,715	2,151	2,164	3,104	3,027
7	604	0,92701	0,93137	622	94	108	0,872	0,870	0,604	0,622	1,547	1,542	2,561	2,479
8	510	0,90252	0,90369	514	108	118	0,844	0,826	0,510	0,514	1,037	1,028	2,033	2,000
9	402	0,86808	0,86599	396	109	117	0,788	0,770	0,402	0,396	0,635	0,632	1,580	1,596
10	293	0,82229	0,81542	279	120	102	0,729	0,705	0,293	0,279	0,342	0,353	1,167	1,265
11	173	0,74602	0,74899	177	80	79	0,590	0,634	0,173	0,177	0,169	0,176	0,977	0,994
12	93	0,65616	0,66429	98	46	50	0,538	0,554	0,093	0,098	0,076	0,078	0,817	0,796
13	47	0,55737	0,56074	48	28	27	0,505	0,490	0,047	0,048	0,029	0,030	0,617	0,625
14	19	0,42625	0,44138	21	9	12	0,404	0,438	0,019	0,021	0,010	0,009	0,526	0,429
15+	10	0,33333	0,31479	9	10	9	0,526	0,429	0,010	0,009	–	–	–	–
Összesen	–	–	–	–	1000	1000	–	–	7,266	7,293	–	–	–	–
Az eltérésnégyzetek összege		–	–	2805	–	1970	–	0,015639	–	0,002805	–	0,018289	–	0,127465
Az illeszkedés szorossága (I)		–	–	0,99932	–	0,94874	–	0,98561	–	0,99923	–	0,99989	–	0,99909

$^* F_i^* = 1000^{[1{,}002087764 \times 0{,}993488513^{(1{,}41222919^{i})}]}$.

Megjegyzés. A becsült értékeket a $\ln F_i / \ln F_0$ értékekhez illesztett Gompertz-függvény szolgálja.

Az 1. tábla esetében az F_i értékek modellezése direkt módszerrel történt, az illesztett Gompertz-függvény paramétereinek értéke a tábla alján megtalálható, helyettesítési értékeit $\left(\hat{F}_i\right)$ pedig a (3) oszlop tartalmazza.

A 2. tábla esetében abból a meggondolásból indultunk ki, hogy a legalább i számú gyermeket szült nők száma a paritás-specifikus termékenységi táblákban többek között az

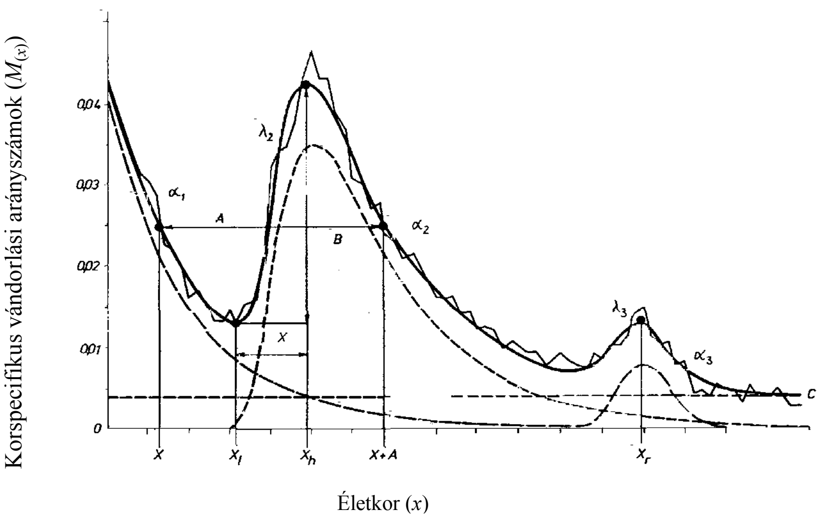
$$F_0^{\left(\ln F_i / \ln F_0\right)}$$

formulával is leírható, illetve reprodukálható, melyben F_0 a legalább 0 gyermeket szült, vagyis gyakorlatilag az összes nők ezerrel egyenlőnek vett számát, F_i pedig a legalább i, (i=1, 2, 3, …) gyermeket (vagyis a 0-nál több gyermeket) szült nők számát jelenti. A Gompertz-függvényt a (3) oszlopban szereplő ($\ln F_i / \ln F_0$) értékekhez illesztettük, az illesztett függvény paramétereinek értéke a tábla alatt, helyettesítési értékei a tábla (4) oszlopában, a becsült $\hat{F}_i$ értékeké pedig a tábla (5) oszlopában találhatók.

A belső vándorlás korspecifikus arányszámai egyes korintervallumokon belüli értékeinek direkt és indirekt modellezése

A belső vándorlás korspecifikus arányszámainak ismert modelljei közül a *Rogers, Raquillet és Castro* 1978-ban közzétett modellrendszere érdemel leginkább figyelmet. Ez a Laxenburgban (Ausztriában) működő Nemzetközi Alkalmazott Rendszerelemzési Intézetben (International Institute for Applied Systems Analysis – IIASA) kidolgozott modellrendszer a belső vándorlás arányszámai empirikus 5. ábra szerinti görbéjének négy, illetve esetenként csupán három szakaszra történő felosztásából és szakaszonkénti modellezéséből áll.

5. ábra. A belső vándorlás korspecifikus arányszámainak laxenburgi modellrendszere



Az első szakasz adataihoz a szerzők negatív regressziós együtthatójú exponenciális függvényt, a második, és ha létezik a harmadik szakasz adataihoz kettős exponenciális függvényt illesztettek. A modellrendszer egésze illeszkedése szorosságának növelése céljából a korspecifikus vándorlási arányszámok becsült értékeihez hozzáadtak egy c-vel jelzett állandót. A belső vándorlás általuk $M(x)$-szel jelzett korspecifikus arányszámainak modellrendszere tehát a következő három regressziós görbe összegeként áll elő:

$$\begin{aligned} M(x) = a_1 \exp(-\alpha_1 x) \\ &+ a_2 \exp\{-\alpha_2(x-\mu_2) - \exp(-\lambda_2(x-\mu_2)\} \\ &+ a_3 \exp\{-\alpha_3(x-\mu_3) - \exp(-\lambda_3(x-\mu_3)\} \\ &+ c. \end{aligned}$$

A második és harmadik szakasz adataihoz illesztett kettős exponenciális függvény azonos a *Coale és McNeil* által a házasodási arány és a termékenység modellezése céljára kidolgozott kettős exponenciális függvénnyel. A modellrendszer egésze általában igen jól illeszkedik a belső vándorlás tényleges korspecifikus arányszámaihoz.

Az arányszámok empirikus görbéjének szakaszokra bontását elfogadva többféle függvényt is megkíséreltünk illeszteni az egyes szakaszok empirikus adataihoz.

Az állandó és ideiglenes jellegű belső vándorlás 1981. évi korspecifikus arányszámai [$v_Y(y)$] első (0 és 13 éves kor közötti) szegmentumát modellezve kimutathattuk, hogy csupán a korrelációs index (I) 0,9-nél nagyobb értékeit fogadva jó illeszkedést jelző értékeknek, a férfi népesség adatai esetében a negatív regressziós együtthatójú exponenciális függvényen ($I = 0{,}97838$) kívül a hatványkitevős (multiplikatív) regressziós függvény ($I = 0{,}95725$), a logaritmikus regressziós függvény ($I = 0{,}98936$); a Gompertz-függvény ($I = 0{,}99268$) és a negyedfokú ortogonális polinom ($I = 0{,}99404$) is igen jó illeszkedésű. A Gompertz-függvény tehát valamelyest alkalmasabbnak bizonyult az első szakasz empirikus értékeinek modellezésére, mint a negatív regressziós együtthatójú exponenciális függvény. Hasonló eredményre jutottunk *John H. Pollard* professzorral a belső vándorlás 1989. évi nyugat-németországi arányszámai első szakaszának modellezése során is.

A női népesség 1981. évi adatai a hatványkitevős regressziós függvény kivételével még nagyobb sikerrel alkalmazhatók a felsorolt függvényekkel, tehát a Gompertz-függvénnyel is modellezhetőknek bizonyultak, és hasonló eredménnyel zárultak a belső vándorlás korspecifikus arányszámai harmadik (utolsó) csoportja modellezésének kísérletei is.

Megjegyezzük, hogy jó illeszkedésűnek bizonyult a Gompertz-függvény a női népesség második csoportba tartozó 1981. évi arányszámainak modellezése estében is, az arányszámok kumulált értékeihez illesztett Gompertz-függvény esetében az illeszkedés jóságát jelző korrelációs index (I) értéke 0,91405-et tett ki.

Kísérleteink alapján arra a következtetésre jutottunk, hogy a belső vándorlás korspecifikus arányszámai szakaszonkénti modellezése létjogosultságának elismerése esetén sem szabad azt hinnünk, hogy a laxenburgi modellrendszer az erre a célra egyedül használható modellrendszer. Az arányszámok empirikus görbéje szakaszonkénti modellezése esetében az egyes szakaszoknál a legszorosabban illeszkedő függvénytípusból kell kialakítanunk azt a modellrendszert, mely az arányszámok empirikus görbéjének egészé re vonatkozóan az eltérésnégyzetek összegét minimálissá, illetve a korrelációs index értékét maximálissá teszi.

A halandósági tábla továbbélési rendjének és halálozási valószínűségeinek indirekt modellezése

A halandósági tábla továbbélési rendjének és halálozási valószínűségeinek szintén több matematikai modellje ismeretes.

A halandósági tábla továbbélési rendje például az

$$l_1^{(\ln l_x / \ln l_1)}$$

formulával is leírható, illetve reprodukálható, ahol l_1 az egyéves egzakt életkorig továbbélők számát, l_x pedig az összes többi egzakt életkorig továbbélők számát jelenti. Adott esetben a férfi népesség és a női népesség 1983. évi halandósági táblájának továbbélési rendjét a hatványkitevők ln l_x/ln l_1 sorozatához illesztett függvények segítségével modellezzük. Az egyéves egzakt életkorig továbbélők száma magukból a halandósági táblákból származik. Az egységnyi gyökűvé átalakított halandósági táblák továbbélési rendjének becsült értékeit a fenti formula felhasználásával állítottuk elő, melyben a hatványkitevő már az illesztett függvényekkel becsült ln l_x/ln l_1 értékeket jelenti. A korspecifikus halálozási valószínűségek becsült értékeit a továbbélési rend becsült értékeinek felhasználásával számítottuk ki $\hat{q}_x = \left(\hat{l}_x - \hat{l}_{x+1}\right) / \hat{l}_x$.

A továbbélési rend és a halálozási valószínűségek indirekt modellezésének eredményei szerint modellezési kísérletünk a női népesség halandósági táblája esetében sikeresebb mint a férfiakénál. Ez a megállapításunk elsősorban a halálozási valószínűségek modellezési eredményeire vonatkozóan igaz, de igaz a továbbélési rend modellezésének eredményeire vonatkozóan is. A továbbélési rend és a halálozási valószínűségek korai kamaszkori megfigyelt értékeinek eléggé szeszélyes alakulása jelentősen nehezítette munkánkat.

A hatványkitevők tényleges értékeinek modellezése – a férfi és a női népesség halandósági táblája esetében egyaránt – ebben az esetben azzal kezdődött, hogy a 40 éves kor feletti értékekhez a részösszegek módszerével Gompertz-függvényt illesztünk, melynek természetesen a 40 éves kor alatti életkorokra vonatkozóan is vannak zérustól eltérő helyettesítési értékei. Ezen értékek és a hatványkitevők tényleges értékei közötti, a férfiak esetében 10 éves kor feletti, a nők esetében 11 éves kor feletti különbségekhez illesztettük a második Gompertz-függvényt, melynek a jelzett életkorok alatti életkorokra vonatkozóan is vannak zérustól eltérő helyettesítési értékei. E helyettesítési értékek és a hatványkitevők tényleges értékei közötti, a férfiak esetében 2 éves kor feletti, a nők esetében 0 éves kor feletti különbségekhez illesztettük a harmadik Gompertz-függvényt, melynek illeszkedése szintén jónak bizonyult. A nők esetében a fiatalkori értékek további korrigálása céljából a momentumok módszerével a normális eloszlás sűrűségfüggvényét illesztettük, helyettesítési értékeit az m_0 momentum 0,14701-et kitevő értékeivel szorozva, ami tulajdonképpen a tényleges és a becsült értékek különbségeinek összege. A harmadik Gompertz-függvény egyébként a nők esetében csupán az egyéves, kétéves és a hároméves korra vonatkozó (adott esetben negatív előjelű) különbségeket korrigálja. A férfiak esetében a korai felnőttkori becsült értékek szorultak korrekcióra, amit a Heligman–Pollard-formula második komponensének illesztésével korrigáltunk. További korrekcióktól részint azért tekintettünk el, hogy az illesztett függvények paramétereinek számát tovább ne növeljük, részint pedig azért, mert az illeszkedés szorosságát a továbbélési rend és a halálozási valószínűségek modelljei esetében is már kielégítő mértékűnek tekintettük.

Az illesztett függvények a férfi népesség 1983. évi halandósági táblája $\ln l_x / \ln l_1$ értékei esetében:

– az első Gompertz-függvény= $0{,}00001125\,94 \cdot 363623{,}0719^{1{,}00520387\,0^{(x-40)}}$ $(n = 20)$;

– a második Gompertz-függvény= $0{,}47998122\,95 \cdot 0{,}96266964\,42^{1{,}19108726\,3^{(x-10)}}$ $(n = 8)$;

– a harmadik Gompertz-függvény= $0{,}18554514\,79 \cdot 0{,}94253995^{\,1{,}37792814\,1^{(x-2)}}$ $(n = 4)$;

– a Heligmann-Pollard-formula második komponensének módosított változata =

$= -0{,}044005515 \cdot \exp[-35{,}9406955 \cdot (\ln x - \ln 18)^2]$.

E függvények helyettesítési értékeinek összegeként állanak elő azok a hatványkitevők, melyek a $l_1 = 0{,}97864$ hatványalapra hatványozva a továbbélők számának becsült értékeit és ez utóbbiak alapján a halálozási valószínűségek és a halandósági tábla többi függvénye becsült értékeit eredményezik.

Az illesztett függvények a női népesség 1983. évi halandósági táblája $\ln l_x / \ln l_1$ értékei esetében:

– az első Gompertz-függvény= $0{,}0339031462 \cdot 77{,}39220412^{1{,}013394228^{(x-40)}}$ $(n = 20)$;

– a második Gompertz-függvény= $0{,}65162115\,65 \cdot 0{,}85961294\,94^{1{,}09832845\,2^{(x-11)}}$ $(n = 11)$;

– a harmadik Gompertz-függvény= $-\,0{,}09031845\,92 \cdot 0{,}92715465\,11^{4{,}22574413\,8^{x}}$ $(n = 1)$;

– a Gauss-függvény= $\dfrac{0{,}14701}{\sqrt{(2\pi \cdot 5{,}766973165)}} \exp\left[-\dfrac{(x - 8{,}149989792)^2}{2 \cdot 5{,}766973165^2}\right]$.

E függvények helyettesítési értékeinek összegeként állanak elő azok a hatványkitevők, melyek a $l_1 = 0{,}98355$ hatványalapra hatványozva a továbbélők számának becsült értékeit és ez utóbbiak alapján a halálozási valószínűségek és a halandósági tábla többi függvénye becsült értékeit eredményezik.

Megjegyezzük, hogy a továbbélési rend, a halálozási valószínűségek és a halandósági tábla számos más függvényének léteznek az ebben a dolgozatban bemutatottól eltérő matematikai modelljei is.

*

A javasolt modellezési eljárások alkalmazási lehetőségeinek kiszélesítése érdekében végzett kísérletek még nem fejeződtek be, hiszen ezek az eljárások, legalábbis elvileg, számos más esetben is alkalmazhatók. Ezek egy részét e tanulmány szerzőjének *John H. Pollard* professzorral közösen írott tanulmánya (1995) is bemutatja.

A múltban már számos kísérlet történt, hogy az általános korspecifikus termékenységi arányszámok tényleges értékeit matematikai függvények illesztésével modellezzük. Ennek eredményeként több tanulmány is bemutatta a Hadwiger-függvény, a gamma függvény, a lognormális függvény, a Pearson család I. fő görbetípusa, a Pearson család III. görbetípusa, a béta függvény, a harmadfokú polinom, a Wald-függvény, a Weibull-függvény és a

Gompertz-függvény e célra való felhasználását. Igen jó az illeszkedés a *Coale* és *Trussel* által kidolgozott termékenységi modellben. A *Coale* és *McNeil* által eredetileg az első házasságkötések kormegoszlásának modellezése céljából kidolgozott eljárás pedig kiválóan alkalmas az első születések korspecifikus arányszámainak, és alacsony termékenységi szint esetén az általános korspecifikus termékenységi arányszámok modellezésére. Számos siker született az indirekt modellezés terén is. A halandósági tábla továbbélési rendjének és halálozási valószínűségeinek számos modellezési kísérlete közül elsősorban *L. Heligman* és *I. H. Pollard*, valamint *Valkovics Emil* kísérlete érdemel említést.

E dolgozatunk csak igen szerény lépést kíván tenni azon a széles országúton, melyet kiváló demográfus kutatók az évek hosszú során át megépítettek és vonzóvá, hasznossá tettek.

IRODALOM

BRASS, W. (1960): The graduation of fertility distribution by polynomial functions. *Population Studies*, 14. sz. 148–162. old.

BRASS, W. et al (1968): *The demography of Tropical Africa*. Princeton University Press, Princeton.

BRASS, W. (1974): Perspectives on population prediction: Illustrated by the Statistics of England and Wales. *Journal of the Royal Statistical Society*, 137. sz. 832–883. old.

BRASS, W. (1978): Population projections for planning and policy. *Papers of the East-West Population Institute*, 55. sz. Honolulu, Hawaii.

COALE, A. J. (1971): Age pattern of marriage. *Population Studies*, 25 évf. 2. sz. 193–214. old.

COALE, A.J. – MCNEIL, D. R. (1972): The distribution by age of the frequency of first marriage in a female cohort. *Journal of the American Statistical Association*, 67. évf. 340. sz. 743–749. old.

COALE, A.J. – TRUSSELL, T. J. (1974): Model fertility: Variations in the age structure of childbearing in human populations. *Population Index*, 40. évf. 2.sz. 185–258. old.

DAVIS, D.S. (1943): *Empirical equations and monography.* McGraw-Hill, New York–London, 57–62. old.

DUCHENE, J. – GILLET-DE STEFANO, S. (1974): Ajustement analytique des courbes de fécondité générale. *Population et Famille*, 32. sz. 53–93. old.

GILJE, E. (1969): Fitting curves to age-specific fertility rates: some examples. *Statistisk Tidskrift*, 7. sz. 118–134. old.

GILJE, E. – YNTEMA, L. (1970): *Shifted Hadwiger fertility function*. Arbeitsnotader-Statistisk Sentralbyra, 16 old.

FEICHTINGER, G. – LUTZ, W. (1983): Eine Fruchtbarkeitshafel auf Paritätsbasis, *Zeitschrift für Bevölkerungswissenschaft*, 4. évf. 363–377. old.

HELIGMAN, L. – POLLLARD, J. H. (1977.): The age pattern of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*, 1980. 107 évf. 49–80. old.

HENRY, L. (1961): Some data on natural fertility. *Eugenics Quarterly*, 8. évf. 2. sz. 81–91. old.

HOEM, F. M. – BERGE, E. (1975): Some problems in Hadwiger fertility graduation. *Scandinavian Actuarial Journal*, 58. sz. 129–144. old.

HOEM, F. M. – MADSEN, D. – NIELSEN, J. L. – OHLSEN, E. M. – HANSEN, H. O. – RENNERMALM, B. (1981): Experiments in modelling recent Danish fertility curves. *Demography*, 18. évf. 2. sz. 231–244. old.

HYRENIUS, H. – SUNDWALL, A. – NYGREN, O. (1974): Methods of fitting a Pearson Type I function to age-specific fertility rates. *Statistisk Tidskrift*, 2. sz. 133–142. old.

KAMARÁS F. (1991): A termékenység alakulása a népességpolitikai intézkedések tükrében. *Demográfia*, 34. évf. 3–4. sz., 359–382. old.

KAMARÁS F. (1996): *Termékenységi adattár*. Központi Statisztikai Hivatal, Budapest, 388 old.

KEYFITZ, N. (1969): *Introduction to the mathematics of population*. Addison Wesley, 450 old.

MAKEHAM, W. M. (1967): On the law of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*. 13. évf. 325–358. old.

MITRA, S. (1967): The pattern of age-specific fertility rates. *Demography*, 2. sz. 894–906. old.

MITRA, S. (1970):. Graduation of net maternity function. *Sankhya*. Series B, 32. sz. 63–68. old.

MITRA, S. (1984): On the characteristics of the parameters of a life table function. *Genus*, 40. évf. 102. sz. 47–56. old.

MITRA, S. – ROMANIUK, A. (1972): Pearsonian Type I curve and its fertility projection potentials. *Demography*, 10. évf. 3. sz. 351–365. old.

MITRA, S. – VALKOVICS, E. – JONES, D. – CLARKE, R. (1990): Graduation models for the age-specific marital fertility rates: The Hungarian example. In: *Journal of Official Statistics (International Review)* Published by Statistics Sweden, 6. évf. 1. sz.

MURPHY, E. M. – NAGNUR, D. N. (1972): A Gompertz fit that fits: Application to Canadian fertility patterns. *Demography*, 9. évf. 1. sz. 35–50. old.

POLLARD, J. H. (1973): *Mathematical models for the growth of human populations.* Cambridge University Press. Cambridge, London, New York, Melbourne, 186 old.

POLLARD, J. H. (1991): Fun with Gompertz. *Genus,* 47. évf. 1–20. old.

POLLARD, J. H. – VALKOVICS, E. J. (1992):. The Gompertz distribution and its applications. *Genus*, 48. évf. 3–4. sz. 15–28. old.

POLLARD, J. H.– VALKOVICS, E. J. (1995): *On the use of the truncated Gompertz distribution and other models to represent the parity progression functions of high fertility populations*. Research Paper, 6. sz. School of Economic and Financial Studies, Macquarie University, Sidney NSW, 29 old.

POLLARD, J. H. – VALKOVICS, E. (1997): On the use of the truncated Gompertz distribution and other models to represents the parity progression functions of high fertility populations, *Mathematical Population Studies*, 6. évf. 4. sz. 291–305. old.

ROGERS, A. – CASTRO, L. F. (1981): *Model migration schedules*. International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria, Research Report.

ROMANIUK, A. (1973): A three-parameter model for birth projections. *Population Studies*, 27. évf. 3. sz. 467–478. old.

TALWAR, P. P. (1970): *Age patterns of fertility*. Institute of Statistics, Mimeo Series, 656. sz. Chapel Hill: University of North Carolina.

TEKSE, K. (1967): On demographic models of age-specific fertility rates. *Statistisk Tidskrift*, 5. évf. 3. sz. 189–207. old.

VALKOVICS, E. (1983): Az általános korspecifikus termékenységi arányszámok néhány direkt módon illeszthető modelljéről. *Demográfia*, 26. évf. 14. sz. 522–567. old.

VALKOVICS, E. (1983): Une méthode indirecte de modelisation des taux de fécondité générale par âge. *European Demographic Information Bulletin*, 14. évf. 1. sz. 11–27. old.

VALKOVICS, E. (1984): Kísérletek a házas termékenység korspecifikus arányszámainak modellezésére. *KSH Népességtudományi Kutató Intézet*, Budapest.

VALKOVICS, E. (1985): *Réfléxions sur les possibilités de modélisation des taux de migration interne par âge*. *Migration Interne. Collecte des données et méthodes d'analyse. Chaire Quetelet '83*. Départment de Démographie, Université Catholique de Louvain, 87–100. old.

VALKOVICS, E. (1988): Polinomiális approximáció alkalmazása az általános korspecifikus termékenységi arányok indirekt modellezésében. *Demográfia*, 31. évf. 1. sz. 67–120.

VALKOVICS, E. – POLLARD, J. H. (1989): Some experiments in the fitting of Pearson curves to age-specific fertility rates using Hungarian data. *Zeitschrift für Bevölkerungswissenschaft*, 15. évf. 4. sz. 427–442. old.

VALKOVICS, E. (1991): Différentes utilisations d'une méthode indirecte de modélisation en démographie. *Population*, 46. évf. 6. sz. 1531–1550. old.

VALKOVICS, E. (1994): Néhány gondolat a Heligman–Pollard formula három komponenséről. *Demográfia*, 37. évf. 4. sz. 203–229. old.

VALKOVICS, E. – WUNSCH, G. (1995): *Some possibilities of modeling the cumulated values of general age-specific fertility rates*. Working Paper, 178. sz. Institut de Démographie. Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, 29 old.

WUNSCH, G. (1966): Courbes de Gompertz et perspectives de fécondité. *Recherches Economiques de Louvain*, 6. sz. 457–468. old.

YNTEMA, L. (1952): *Mathematical models of demographic analysis*. Leiden, 78 old.

YNTEMA, L. (1969): On Hadwiger's fertility function. *Statistisk Tidskrift*, 7. sz. 113–117. old.

SUMMARY

The paper presents the famous function elaborated and published first in 1825 by Benjamin Gompertz when introducing the concept of the „force of mortality" in mortality analysis. All the life table functions are formulated by transforming the original Gompertz formula and numerical examples show the enlarged possibilities of the use of the Gompertz function for the purposes of direct and indirect modelling of the general age-specific fertility rates, the cumulated values of general age-specific fertility rates, the age-specific rates of martial fertility, the number of women reaching parity *i* or having at least *i* children in parity-progression fertility tables, the age-specific rates of internal migration, the life table survival function and the probabilities of dying in the life table. It is shown that the Gompertz function may be fitted in special cases even twice or even three times for improving the quality of fit of the model to empirical data or for creating a system of models consisting of several functions. The corresponding Hungarian data for 1983 were mainly used for demonstration.

1. Az általános korspecifikus termékenységi arányszámok indirekt modellezése a kumulált értékeikhez illesztett Gompertz-függvény segítségével (Magyarország, 1983)

Életkor (év) y	$\sum_{15}^{y} f_Y(y)$	fGOM $\sum_{15}^{y} f_Y(y)$	Életkor (év) $y+0{,}5$	$f_Y(y)$	$fGOM\,(ind.)_Y(y)$
16	0,0094	0,0112	15,5	0,0094	0,0112
17	0,0332	0,0336	16,5	0,0238	0,0224
18	0,0799	0,0791	17,5	0,0467	0,0455
19	0,1598	0,1548	18,5	0,0799	0,0757
20	0,2752	0,2619	19,5	0,1154	0,1071
21	0,4122	0,3953	20,5	0,1370	0,1334
22	0,5641	0,5459	21,5	0,1519	0,1506
23	0,7129	0,7028	22,5	0,1488	0,1569
24	0,8620	0,8567	23,5	0,1491	0,1539
25	1,0024	1,0004	24,5	0,1404	0,1437
26	1,1316	1,1296	25,5	0,1292	0,1292
27	1,2425	1,2424	26,5	0,1109	0,1128
28	1,3367	1,3385	27,5	0,0942	0,0961
29	1,4164	1,4190	28,5	0,0797	0,0805
30	1,4839	1,4854	29,5	0,0675	0,0664
31	1,5383	1,5396	30,5	0,0544	0,0542
32	1,5826	1,5834	31,5	0,0443	0,0438
33	1,6185	1,6186	32,5	0,0359	0,0352
34	1,6476	1,6467	33,5	0,0291	0,0281
35	1,6712	1,6691	34,5	0,0236	0,0224
36	1,6896	1,6868	35,5	0,0184	0,0177
37	1,7046	1,7009	36,5	0,0150	0,0141
38	1,7157	1,7119	37,5	0,0111	0,0110
39	1,7241	1,7206	38,5	0,0084	0,0087
40	1,7306	1,7275	39,5	0,0065	0,0069
41	1,7352	1,7329	40,5	0,0046	0,0054
42	1,7386	1,7371	41,5	0,0034	0,0042
43	1,7412	1,7405	42,5	0,0026	0,0034
44	1,7425	1,7431	43,5	0,0013	0,0026
45	1,7432	1,7451	44,5	0,0007	0,0020
46	1,7436	1,7467	45,5	0,0004	0,0016
47	1,7437	1,7480	46,5	0,0001	0,0013
48	1,7438	1,7490	47,5	0,0001	0,0010
49	1,7438	1,7497	48,5	0,0000	0,0007
50	1,7438	1,7503	49,5	0,0000	0,0006
Az eltérésnégyzetek összege	–	0,00118273[3]	–	–	0,00023105[4]

[3] $\sum_{y}\left[\sum_{15}^{a} f_Y(y) - fGOM\sum_{15}^{a} f_Y(y)\right]^2.$

[4] $\sum_{y}\left[f_Y(y) - fGOM(ind.)_Y(y)\right]^2.$

2. Az 1983. évi magyarországi általános korspecifikus termékenységi arányszámok

$$\left[\sum_{15}^{50} 1000\, f_Y(y)\right]^{\left[\ln \sum_{15}^{y} 1000\, f_Y(y) / \ln \sum_{15}^{50} 1000\, f_Y(y)\right]}$$ *transzformáción alapuló indirekt modellezése*

Életkor (év) y	Az általános korspecifikus termékenységi arányszámok tényleges kumulált értékei (x1000)	A tényleges	A becsült		Az általános korspecifikus termékenységi arányszámok becsült kumulált értékei (x1000)		Életkor (év) y+0,5	Az általános korspecifikus termékenységi arányszámok		
		$\ln \sum_{15}^{y} 1000 f_Y(y) / \ln \sum_{15}^{50} 1000 f_Y(y)$						tényleges	indirekt módon becsült	
		értékek						értékei (x1000)		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)*/	(7)**/	(8)	(9)	(10)	(11)
16	9,4	0,30021	0,37594	0,32036	16,5	10,9	15,5	9,4	16,5	10,9
17	33,2	0,46927	0,47442	0,45859	34,5	30,7	16,5	23,8	18,0	19,8
18	79,9	0,58693	0,56648	0,58272	68,6	77,4	17,5	46,7	34,1	46,7
19	159,8	0,67980	0,64848	0,68131	126,5	161,6	18,5	79,9	57,9	84,2
20	275,2	0,75263	0,71887	0,75322	213,9	276,4	19,5	115,4	87,7	114,8
21	412,2	0,80676	0,77761	0,80622	331,6	410,5	20,5	137,0	117,7	134,1
22	564,1	0,84879	0,82559	0,84745	474,4	558,5	21,5	151,9	142,8	148,0
23	712,9	0,88016	0,86415	0,88002	632,6	712,2	22,5	148,8	158,2	153,7
24	862,0	0,90560	0,89475	0,90566	794,9	862,4	23,5	149,1	162,3	150,2
25	1002,4	0,92582	0,91879	0,92584	951,2	1002,6	24,5	140,4	156,3	140,2
26	1131,6	0,94206	0,93756	0,94178	1094,2	1129,2	25,5	129,2	143,0	126,6
27	1242,5	0,95459	0,95212	0,95444	1219,8	1241,1	26,5	110,9	125,6	111,9
28	1336,7	0,96438	0,96337	0,96452	1326,7	1338,1	27,5	94,2	106,9	97,0
29	1416,4	0,97214	0,97203	0,97254	1415,2	1420,6	28,5	79,7	88,5	82,5
30	1483,9	0,97838	0,97869	0,97888	1487,4	1489,5	29,5	67,5	72,2	68,9
31	1538,3	0,98320	0,98379	0,98386	1545,1	1545,9	30,5	54,4	57,7	56,4
32	1582,6	0,98700	0,98770	0,98772	1590,8	1591,1	31,5	44,3	45,7	45,2
33	1618,5	0,99001	0,99069	0,99070	1626,7	1626,9	32,5	35,9	35,9	35,8
34	1647,6	0,99240	0,99298	0,99298	1654,8	1654,8	33,5	29,1	28,1	27,9
35	1671,2	0,99430	0,99473	0,99473	1676,5	1676,5	34,5	23,6	21,7	21,7
36	1689,6	0,99577	0,99606	0,99606	1693,3	1693,3	35,5	18,4	16,8	16,8
37	1704,6	0,99695	0,99708	0,99708	1706,2	1706,2	36,5	15,0	12,9	12,9
38	1715,7	0,99782	0,99785	0,99785	1716,0	1716,0	37,5	11,1	9,8	9,8
39	1724,1	0,99848	0,99844	0,99844	1723,6	1723,6	38,5	8,4	7,6	7,6
40	1730,6	0,99898	0,99890	0,99890	1729,5	1729,5	39,5	6,5	5,9	5,9
41	1735,2	0,99934	0,99924	0,99924	1733,9	1733,9	40,5	4,6	4,4	4,4
42	1738,6	0,99960	0,99950	0,99950	1737,3	1737,3	41,5	3,4	3,4	3,4
43	1741,2	0,99980	0,99970	0,99970	1739,9	1739,9	42,5	2,6	2,6	2,6
44	1742,5	0,99990	0,99986	0,99986	1742,0	1742,0	43,5	1,3	2,1	2,1
45	1743,2	0,99995	0,99997	0,99997	1743,4	1743,4	44,5	0,7	1,4	1,4
46	1743,6	0,99998	1,00006	1,00006	1744,6	1744,6	45,5	0,4	1,2	1,2
47	1743,7	0,99999	1,00013	1,00013	1745,5	1745,5	46,5	0,1	0,9	0,9
48	1743,8	1,00000	1,00018	1,00018	1746,1	1746,1	47,5	0,1	0,6	0,6
49	1743,8	1,00000	1,00022	1,00022	1746,7	1746,7	48,5	0,0	0,6	0,6
50	1743,8	1,00000	1,00025	1,00025	1747,1	1747,1	49,5	0,0	0,4	0,4
Az eltérésnégyzetek összege					35501,14	445,54	-	-	3162,5	134,13
Az illeszkedés szorossága (I)					0,99857	0,99998	-	-	0,98387	0,99932

*/ $\sum_{15}^{y} 1000 f_Y(y) = 1743{,}8\left[1{,}000345580 \cdot 0{,}276962634^{0{,}762272808^{(y-15)}}\right]$

**/ $\sum_{15}^{y} 1000 f_Y(y) = 1743{,}8\left[-0{,}306375224 \cdot 0{,}558004678^{1{,}539428790^{(y-15)}} + 0{,}145397075 \cdot 0{,}305070845^{1{,}168788326^{(y-19)}} + 1{,}000345618 \cdot 0{,}777362782^{0{,}762294515^{(y-21)}}\right]$

3. Az 1983. évi magyarországi általános korspecifikus termékenységi arányszámok $f_Y(M)^{\left[\ln f_Y(y)/\ln f_Y(M)\right]}$ transzformáción alapuló indirekt modellezése

Életkor (év) y+0,5	Az általános korspecifikus termékenységi arányszámok tényleges értékei	A tényleges $\frac{\ln f_Y(y)}{\ln f_Y(M)}$ értékek	$\ln f_Y(y)/\ln f_Y(M)$			Az általános korspecifikus termékenységi arányszámok		
			negyedfokú ortogonális polinommal	Gompertz függvénnyel és exponenciális függvénnyel	Gompertz függvénnyel és hatvány-függvénnyel	negyedfokú ortogonális polinommal	Gompertz függvénnyel és exponenciális függvénnyel	Gompertz függvénnyel és hatvány-függvénnyel
			becsült értékei			indirekt módon becsült értékei		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)*/	(8)**/	(9)***/
15,5	0,0094	2,47650	2,37579	2,53752	2,24628	0,0114	0,0084	0,0145
16,5	0,0238	1,98355	1,97615	1,98547	1,89961	0,0241	0,0237	0,0279
17,5	0,0467	1,62587	1,65799	1,59404	1,61545	0,0440	0,0496	0,0476
18,5	0,0799	1,34090	1,41208	1,32714	1,39100	0,0699	0,0820	0,0727
19,5	0,1154	1,14583	1,22979	1,15519	1,22233	0,0985	0,1134	0,0999
20,5	0,1370	1,05478	1,10307	1,05446	1,10460	0,1251	0,1371	0,1247
21,5	0,1519	1,00000	1,02441	1,00638	1,03232	0,1451	0,1501	0,1429
22,5	0,1488	1,01094	0,98690	0,99682	0,99970	0,1557	0,1528	0,1520
23,5	0,1491	1,00987	0,98418	1,01522	1,00089	0,1565	0,1476	0,1516
24,5	0,1404	1,04178	1,01048	1,05404	1,03024	0,1489	0,1372	0,1435
25,5	0,1292	1,08580	1,06059	1,10800	1,08267	0,1355	0,1239	0,1300
26,5	0,1109	1,16693	1,12988	1,17359	1,15373	0,1189	0,1095	0,1137
27,5	0,0942	1,25354	1,21427	1,24857	1,23969	0,1017	0,0951	0,0967
28,5	0,0797	1,34223	1,31028	1,33163	1,33763	0,0846	0,0813	0,0804
29,5	0,0675	1,43040	1,41499	1,42213	1,44536	0,0695	0,0686	0,0656
30,5	0,0544	1,54489	1,52603	1,51984	1,56131	0,0564	0,0570	0,0527
31,5	0,0443	1,65387	1,64165	1,62483	1,68445	0,0453	0,0468	0,0418
32,5	0,0359	1,76543	1,76062	1,73735	1,81413	0,0363	0,0379	0,0328
33,5	0,0291	1,87687	1,88231	1,85782	1,95000	0,0288	0,0302	0,0254
34,5	0,0236	1,98803	2,00666	1,98673	2,09188	0,0228	0,0237	0,0194
35,5	0,0184	2,12010	2,13417	2,12460	2,23971	0,0179	0,0182	0,0147
36,5	0,0150	2,22851	2,26593	2,27205	2,39349	0,0140	0,0138	0,0110
37,5	0,0111	2,38829	2,40357	2,42974	2,55327	0,0108	0,0103	0,0081
38,5	0,0084	2,53618	2,54932	2,59838	2,71910	0,0082	0,0075	0,0060
39,5	0,0065	2,67226	2,70597	2,77873	2,89103	0,0061	0,0053	0,0043
40,5	0,0046	2,85572	2,87689	2,97159	3,06912	0,0044	0,0037	0,0031
41,5	0,0034	3,01612	3,06600	3,17784	3,25343	0,0031	0,0025	0,0022
42,5	0,0026	3,15847	3,27782	3,39840	3,44403	0,0021	0,0017	0,0015
43,5	0,0013	3,52628	3,51742	3,63427	3,64097	0,0013	0,0011	0,0010
44,5	0,0007	3,85476	3,79046	3,88651	3,84430	0,0008	0,0007	0,0007
45,5	0,0004	4,15172	4,10314	4,15627	4,05410	0,0004	0,0004	0,0005
46,5	0,0001	4,67218	4,46227	4,44474	4,27040	0,0002	0,0002	0,0003
47,5	0,0001	4,88733	4,87520	4,75323	4,49328	0,0001	0,0001	0,0002
48,5	0,0000	5,37355	5,34987	5,08314	4,72278	0,0000	0,0001	0,0001
49,5	0,0000	5,74136	5,89478	5,43594	4,95896	0,0000	0,0000	0,0001
Az eltérésnégyzetek összege			-	-	-	0,00095524	0,00010929	0,00071739
Az illeszkedés szorossága (I)			-	-	-	0,99515	0,99945	0,99636

*/ $\hat{f}_Y(y) = 0{,}1519^{\left[2{,}782628113\cdot10^{1} - 3{,}420632080\cdot10^{0}\,y + 1{,}579091139\cdot10^{-1}\,y^2 - 3{,}153295305\cdot10^{-3}\,y^3 + 2{,}380653548\cdot10^{-5}\,y^4\right]}$

**/ $\hat{f}_Y(y) = 0{,}1519^{\left[1656{,}454095\cdot0{,}001674719^{1{,}052570716^{(y-14{,}5)}} + 0{,}196201008\cdot\exp(0{,}06710401y)\right]}$

***/ $\hat{f}_Y(y) = 0{,}1519^{\left[30{,}82870707\cdot0{,}077644828^{1{,}082737654^{(y-14{,}5)}} + 0{,}000440126y^{2{,}391007031}\right]}$

4. A házas termékenység 1983. évi magyarországi korspecifikus arányszámainak direkt modellezése Gompertz-függvény segítségével

Életkor (év) y+0,5	A házas termékenység		Életkor (év) y+0,5	A házas termékenység	
	tényleges	Gompertz függvénnyel becsült		tényleges	Gompertz-függvénnyel becsült
	korspecifikus arányszámai*/			korspecifikus arányszámai*/	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
15,5	0,8516	0,5009	34,5	0,0246	0,0240
16,5	0,5009	0,4595	35,5	0,0194	0,0134
17,5	0,4130	0,4191	36,5	0,0153	0,0181
18,5	0,3543	0,3800	37,5	0,0112	0,0098
19,5	0,3177	0,3424	38,5	0,0085	0,0070
20,5	0,2737	0,3065	39,5	0,0063	0,0049
21,5	0,2489	0,2724	40,5	0,0045	0,0033
22,5	0,2131	0,2403	41,5	0,0032	0,0022
23,5	0,1960	0,2103	42,5	0,0025	0,0014
24,5	0,1743	0,1825	43,5	0,0012	0,0009
25,5	0,1542	0,1569	44,5	0,0007	0,0006
26,5	0,1297	0,1336	45,5	0,0003	0,0003
27,5	0,1087	0,1126	46,5	0,0001	0,0002
28,5	0,0909	0,0939	47,5	0,0000	0,0001
29,5	0,0758	0,0773	48,5	0,0000	0,0001
30,5	0,0604	0,0629	49,5	0,0000	0,0000
31,5	0,0487	0,0505			
32,5	0,0389	0,0400	Az eltérésnégyzetek összege	–	0,12879333
33,5	0,0312	0,0312	Az illeszkedés szorossága (I)	–	0,940712

*/ $\hat{f}_y(y) = 1{,}933668155 \times 0{,}2809897671^{1{,}063999662^{(y-14,5)}}$