

A telítődési, a logisztikus és az életgörbe alakú trendfüggvények becslése Excel parancsfájl segítségével*

Kehl Dániel,

a Pécsi Tudományegyetem
egyetemi tanársegéde

E-mail: kehd@ktk.pte.hu

Dr. Sipos Béla,

a Pécsi Tudományegyetem
egyetemi tanára

E-mail: sipos@ktk.pte.hu

A telítődési, a logisztikus és az életgörbe alakú trendfüggvények a gazdasági-társadalmi-demográfiai folyamatok hosszabb távú előrejelzésében kaphatnak meghatározó szerepet.

A tanulmány egyrészt e függvények többé-kevésbé teljes körű, összefoglaló áttekintését, tulajdonságaik bemutatását tűzte ki célul. Az itt bemutatott eredmények jórészt megtalálhatók a szakirodalomban, ám összefoglalásuk sokat segíthet a későbbi alkalmazóknak, így bizonyos értelemben forrásértékű lehet. Másrészt ezeknek a függvényeknek a paraméterbecslése nem triviális, ezért a szinte mindenki által hozzáférhető Excel környezetben kidolgozott parancsfájl segíthet az érdemi alkalmazások elterjedésében. Lásd:

<http://www.gmi.ktk.pte.hu/index.php?mid=33#SiposB>

TÁRGYSZÓ:

Idősorelemzés.

Trendszámítás.

Előrejelzés.

* A szerzők köszönetet mondanak *Hunyadi Lászlónak* és *Varga Józsefnek* szakmai tanácsaikért.

A telítődési, a logisztikus és az életgörbe trendfüggvények olyan folyamatok, jelenségek leírására alkalmasak, amelyeknek a növekedése korlátos. A tartós fogyasztási cikkek (például tévé, rádió, telefon, autó stb.) forgalmának alakulása – a piac korlátozottsága miatt – telítődési trendet követ, mert van egy szint, ami fölé a kereslet nem emelkedik. Az ipari termékek életgörbéje is hasonló tendenciát mutat az első felszálló szakaszban, az eltérés azonban az, hogy a csúcspont elérése után leszálló szakasz következik, előbb csökken és végül megszűnik a gyártás és a forgalom. Gyakran előfordul, hogy az első felszálló szakaszban a fejlődés három szakaszát különíthetjük el: 1. a kísérletezés stádiuma, amit a gyártás beindítása, a lassú növekedés jellemez; 2. a „nagy felfutás” időszaka, nő a kereslet, a gyártás ezért tömegszerűvé válik; 3. a piac telítődése, amikor már csak az elhasználódás pótlására van lehetőség (Theiss [1958] 199–200. old.). A piaci érettség, a telítődés szakaszát a kereslet és a gyártás hanyatlása (többnyire új, korszerűbb termék jelenik meg a piacon), és végül a gyártás megszüntetése követi. A termékéletgörbe konkrét alakjának meghatározása a tervezés időszakában nem egyszerű feladat. Az élettartam a terméktől függően lehet néhány hónap (a divat által erősen befolyásolt termékek), néhány év (informatikai eszközök) vagy több évtized (mezőgazdasági termények).

A telítődési függvényeket (elsősorban a Gompertz- és Johnson-függvényeket) a demográfusok és a biztosítási szakemberek a népesedési és túlélési folyamatok leírására és közelítésére használják. Az inflexiós pont jelzi a vizsgált jelenség fejlődésében bekövetkező jelentősebb változást és annak várható időpontját is. Az inflexiós pont kifejezi, hogy a fejlődés „hajtóerői” kifulladtak, várható, hogy a fejlődés jellege is megváltozik és lelassul. Tulajdonképpen a fejlődés egyik kritikus pontja éppen az inflexiós pontnál van. A telítődési függvények monoton növekvő függvények, ahol az időváltozó (t) növekedésével a növekedési értékek a nullához tartanak. Más megfogalmazásban a függvényértékek K telítődési paraméterhez, szaturációs szinthez, vagyis egy konstans értékhez tartanak, ha az időváltozó a végtelenbe tart:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = K.$$

A feladat megkeresni azokat a paramétereket, amelyek mellett az illesztés a legpontosabb. A tapasztalatok szerint az egyszerűbb függvényformákkal (lineáris, hatványkitevős, exponenciális, parabolikus stb.) szemben a bonyolultabb telítődési függvények alkalmazása lényegesen számításigényesebb, ugyanakkor kiküszöbölik az egyszerűbb függvények azon hibáját, hogy a növekedésnek (vagy csökkenésnek) nincs felső vagy alsó korlátja (Freschl [1982], Herman–Varga [1983], Herman [1985], Valkovics [2001], Hunyadi [2004]). E probléma megoldására MS Excel pa-

rancsfájlt dolgoztunk ki. A számításiigényesség mint probléma megszüntethető a bemutatásra kerülő parancsfájl alkalmazásával.

A trendek ismertetésénél figyelembe vettük *Descartes* ([1961] 214–215. old.) módszertani szabályait, ami szerint az egyszerűtől kell haladni a bonyolult felé, vagyis figyelembe kell venni azt, hogy az összetett módszerek általában speciális esetként tartalmazzák az egyszerűbbeket. A másik fontos szabály a felsorolás elve, vagyis a teljességre kell törekedni.¹ Descartes azt is hangsúlyozza, hogy minden módszernek elméleti következményei vannak. A földön hosszú távon gyakorlatilag minden gazdasági-társadalmi-demográfiai folyamat korlátozott térben zajló növekedési folyamat és ennek következménye az, hogy igen gyakran tapasztaljuk, hogy léteznek telítődési pontok (*Fokasz* [2006] 19–51. old).

A Descartes-i módszertani szabályokat figyelembe véve először a legegyszerűbb telítődési függvényeket ismertetjük, amelyek inflexiós ponttal nem rendelkeznek. A bemutatásra kerülő következő hét S-alakú trendfüggvény egy inflexiós ponttal rendelkezik. Az életgörbe- és a Hubbert-féle trendfüggvény két inflexiós ponttal és három paraméterrel rendelkezik. Az életgörbe trenddel többek között a termékéletgörbék alakulását lehet modellezni, ahol a növekedési szakaszt egy csökkenő szakasz követi.

A logisztikus függvények régóta foglalkoztatják az idősor modellezés kutatóit. A XIX. század első felében *Gompertz* és *Verhulst* munkásságát lehet kiemelni. A logisztikus függvény a XX. század első felében az ökonometriai modellezés egyik fontos eszköze volt és számos modell került kidolgozásra. Népszerűsége bizonyos területeken az elmúlt évszázadban sem csökkent, különösen a piaci és demográfiai folyamatok gyakori jellemzője, hogy egy ideig gyors ütemben nőnek, majd később érvényesülnek a növekedés korlátai, csökken a növekedési ütem. A folyamat jellegétől függően a növekedés bizonyos idő után a nullához tart, illetve az is elképzelhető, hogy a tendencia megfordul.

1. Inflexiós ponttal nem rendelkező telítődési görbék

A következőkben a Mitscherlich-², a Bertalanffy-³ az egyszerűen modifikált exponenciális, a Törnquist 1., valamint Törnquist 2. függvényeket mutatjuk be röviden (*Mitscherlich* [1919] 167–182. old., *Bertalanffy* [1938] 181–213. old., *Kotz et al.* [2006]

¹ A teljességre természetesen csak törekedni lehet, számos logisztikus függvényt nem tudunk bemutatni, például: Korf-függvény (*Liao-Podrázský-Liu* [2003] 545. old.), Weibull- és Béta-függvények (*Xinyou Yin et al.* [2003] 362. és 369. old.), Causton- és Venus-függvény (*Colin* [1999] 715. old.).

² *Eilhard Alfred Mitscherlich* (1874–1956) német agronómus.

³ *Ludwig von Bertalanffy* (1901–1972) osztrák születésű biológus, a rendszerelmélet megalkotója.

14. 8727–8728. old.). (Lásd az 1. táblázatot.) E függvények közös jellemzője, hogy inflexiós ponttal nem rendelkeznek, értelmezési tartományukon $(0-\infty)$ intervallumon konkáv módon viselkednek.

Ez utóbbi tulajdonság akkor teljesül, ha a függvény kétszer differenciálható az időváltozó szerint és a második derivált negatív. Az ismertetésre kerülő telítődési függvények második deriváltja mindenütt negatív.

Ha K azonos, akkor $Kb=a$, tehát a Bertalanffy-függvény és az egyszerűen modifikált exponenciális függvény azonos.

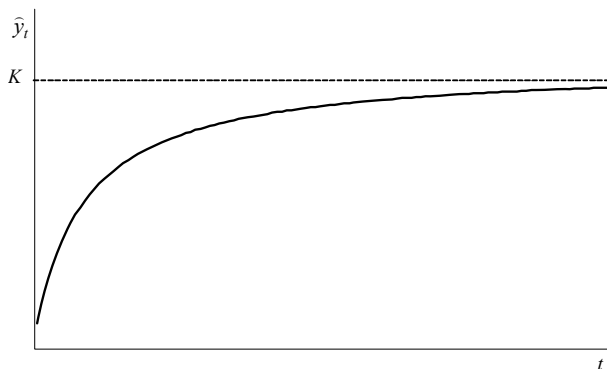
1. táblázat

Inflexiós ponttal nem rendelkező telítődési görbék főbb jellemzői

Függvény	Formula	\hat{y}_0	$\frac{d^2 \hat{y}_t}{dt^2}$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_t$
Mitscherlich	$\hat{y}_t = K(1 - e^{-rt})$	0	$-Kr^2 e^{-rt}$	K
Bertalanffy	$\hat{y}_t = K(1 - be^{-rt})$	$K(1 - b)$	$-Kbr^2 e^{-rt}$	K
Egyszerűen modifikált exponenciális függvény	$\hat{y}_t = K - ae^{-rt}$	$K - a$	$-ar^2 e^{-rt}$	K
Törnquist 1.	$\hat{y}_t = \frac{Kt}{t + a}$	0	$\frac{-2aK}{(a + t)^3}$	K
Törnquist 2. ($a < b$)	$\hat{y}_t = \frac{K(t + a)}{t + b}$	$\frac{Ka}{b}$	$\frac{2K(a - b)}{(b + t)^3}$	K

Az inflexiós ponttal nem rendelkező telítődési függvények sematikus ábrája a következőképpen néz ki.

1. ábra. Az inflexiós ponttal nem rendelkező telítődési függvény



Tipikus alkalmazási területük a jelentős technológiai újítással gyártott termékek gyors elterjedése az adott szegmensben, amikor termékváltás következik be: például ilyen volt a rugós órát felváltó kvarcóra, a fekete-fehér tévét váltó színes tévé vagy a közelmúltban a plazma- és LCD-tévék megjelenése a piacon.

2. Egy inflexiós ponttal rendelkező trendfüggvények

A logisztikus trendfüggvények kezdetben konvex, később konkáv függvénygörbét írnak le. Ezeket a logisztikus trendfüggvényeket, alakjuk miatt S-alakú függvényeknek is hívják a szakirodalomban. Tanulmányunkban a logisztikus, a késleltetett logisztikus, a négyzetesen logisztikus, a Gompertz-féle, a 63 százalékos, a Johnson-féle és az általánosított Richards-féle trendfüggvényeket mutatjuk be.

2.1. A logisztikus trendfüggvény

Az egyik első logisztikus trendfüggvényt (népesség növekedési modellt) *Verhulst*⁴ 1838-ban publikálta:

$$\hat{y}_t = \frac{K}{1 + e^{-c(t-m)}} = \frac{Ke^{ct}}{e^{cm} + e^{ct}},$$

ahol

K – a telítettségi szint, $K > 0$;

m – az inflexiós pont helyét adja meg, $m > 0$;

c – a növekedési sebességet jellemző paraméter, ha $c > 0$, akkor logisztikus növekedésről, ha $c < 0$, akkor logisztikus csökkenésről van szó.

A függvény inflexiós pontjának⁵ koordinátái:

⁴ *Pierre-Francois Verhulst* belga matematikus, statisztikus (1804–1849).

⁵ Egy függvény inflexiós pontján azt értjük, hogy ebben a pontban az érintő átmettszi a görbét. Az inflexiós pont létezésének szükséges feltétele – ha a függvénynek az inflexiós pontban a harmadrendű deriváltja is létezik – az, hogy a függvény második deriváltja ebben a pontban nulla legyen, az elégséges feltétel pedig az, hogy a harmadik derivált az inflexiós pontban ne legyen egyenlő nullával. Természetesen feltételezzük, hogy a függvény az inflexiós pont környezetében háromszor differenciálható. Mivel $(e^x)' = e^x$, így ez a feltétel az esetek többségében automatikusan teljesül. Az inflexiós pont létezésének szükséges és elégséges feltétele az is, ha a második derivált a zérus pontjában előjelet vált, ami azt mutatja, hogy a konvex (konkáv) ívet konkáv (konvex) követi. Az inflexiós pontok meghatározásához a DERIVE6 szoftvert használtuk.

$$\frac{d^2 \hat{y}_t}{dt^2} = \frac{Kc^2 e^{c(m+t)} (e^{cm} - e^{ct})}{(e^{cm} + e^{ct})^3} = 0,$$

$$e^{ct} = e^{cm},$$

$$t_w = m,$$

$$\hat{y}_{t_w} = \frac{K}{2}.$$

A harmadik derivált ebben a pontban nem egyenlő 0-val, mivel:

$$\left. \frac{d^3 \hat{y}_t}{dt^3} \right|_{t_w} = 0,$$

$$e^{2cm} - 4e^{2cm} + e^{2cm} = 0,$$

$$-2e^{2cm} \neq 0.$$

A függvény helyettesítési értéke a $t = 0$ helyen és a telítődési szint:

$$\hat{y}_0 = \frac{K}{(1 + e^{cm})},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_t = K.$$

Napjainkban logisztikus trendfüggvény névvel az egyik legelterjedtebben alkalmazott, Pearl–Reed-féle⁶ logisztikus telítődési függvényt illeti az irodalom (*Pearl-Reed* [1920] 275–288. old., *Farnum–Stanton* [1989] 189–191. old.). A függvény szimmetrikus az inflexiós pontra, ahol a görbe a telítettségi szint felét ($K/2$) éri el. A telítődés annak a következménye, hogy a görbe a konvex szakaszból konkávba megy át, azaz a vizsgált jelenségben fordulópont (minőségi változás) következett be.

A függvényt leíró formula:

$$\hat{y}_t = \frac{K}{1 + b e^{-ct}} = \frac{K e^{ct}}{e^{ct} + b},$$

ahol

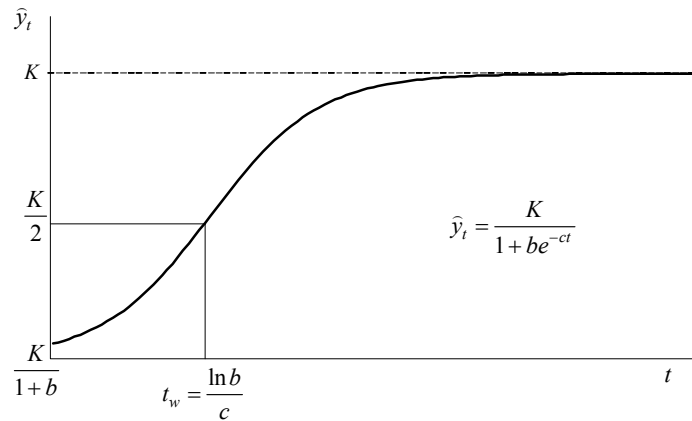
K – a telítettségi szint, $K > 0$;
 b – a helyzetparaméter, $b > 0$;

⁶ *Raymond Pearl* (1879–1940) amerikai biológus, *Lowell J. Reed* (1886–1966) matematikus, biostatistikus.

c – növekedési sebességet jellemző paraméter, ha $c > 0$ logisztikus növekedésről, ha $c < 0$, akkor logisztikus csökkenésről van szó.

A 2. ábra mutatja a függvény alakját és nevezetes pontjait.

2. ábra. A Pearl–Reed-féle logisztikus trendfüggvény



A függvény inflexiós pontjának koordinátái:

$$\frac{d^2 \hat{y}_t}{dt^2} = \frac{bc^2 K e^{ct} (b - e^{ct})}{(e^{ct} + b)^3} = 0,$$

$$t_w = \frac{\ln b}{c},$$

$$\hat{y}_{t_w} = \frac{K}{2}.$$

A harmadik derivált ebben a pontban nem egyenlő 0-val, hiszen $b > 0$, tehát ebben a pontban inflexiós pont van:

$$\left. \frac{d^3 \hat{y}_t}{dt^3} \right|_{t_w} = 0,$$

$$e^{2 \ln b} - 4b e^{\ln b} + b^2 = 0,$$

$$b = 0.$$

A függvény helyettesítési értéke a $t = 0$ helyen és a telítődési szint:

$$\hat{y}_0 = \frac{K}{1+b},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_t = K.$$

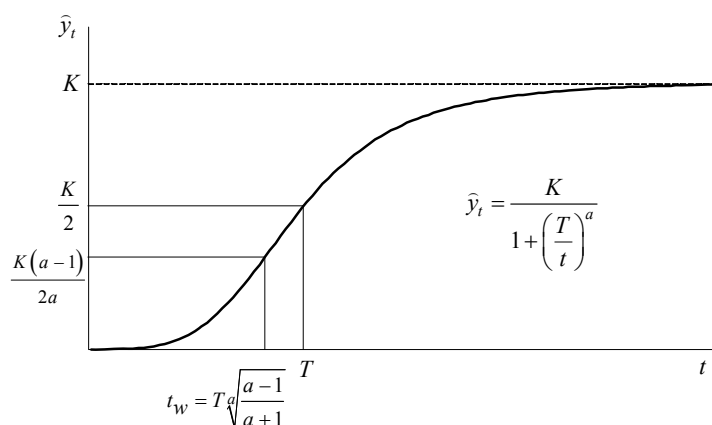
Könnyen belátható az, hogy a Verhulst és a Pearl–Reed-féle függvények lényegében azonosak:

$$\frac{Ke^{ct}}{e^{cm} + e^{ct}} = \frac{Ke^{c't}}{e^{c't} + b'}.$$

2.2. Késleltetett logisztikus trendfüggvény

Az előzőekben bemutatott logisztikus trendfüggvénynek az inflexiós pontra való szimmetriája sok idősor esetén modellezési szempontból nem helytálló. Ha a kezdeti növekedés gyorsabb ütemű, és a görbe az inflexiós pontot a telítettségi szint felénél korábban éri el, akkor használhatjuk a késleltetett logisztikus trendfüggvényt. Az inflexiós pont után a késleltetett logisztikus trendfüggvény konkáv szakasza hosszabb és elnyújtottabb, mint a logisztikus trend hasonló konkáv szakasza, tehát késleltetett hatás érvényesül a telítődési szint elérésében. A 3. ábra a késleltetett logisztikus trendfüggvény alakját és nevezetes pontjait mutatja be.

3. ábra. A késleltetett logisztikus trendfüggvény



A függvényt leíró formula:

$$\hat{y}_t = \frac{K}{1 + \left(\frac{T}{t}\right)^a},$$

ahol

T – a helyzetparaméter, $T > 0$;

a – növekedési sebességet jellemző paraméter, $a > 1$.

Amennyiben $t = T$, úgy:

$$\hat{y}_T = \frac{K}{2}.$$

A függvény inflexiós pontjának koordinátái:⁷

$$\frac{d^2 \hat{y}_t}{dt^2} = \frac{aK \left[(a-1) \left(\frac{T}{t}\right)^a - a - 1 \right]}{t^2 \left[\left(\frac{T}{t}\right)^a + 1 \right]^3} \left(\frac{T}{t}\right)^a = 0,$$

$$t_w = T \sqrt[a]{\frac{a-1}{a+1}},$$

$$\hat{y}_{t_w} = \frac{K(a-1)}{2a}.$$

A telítődési szint:

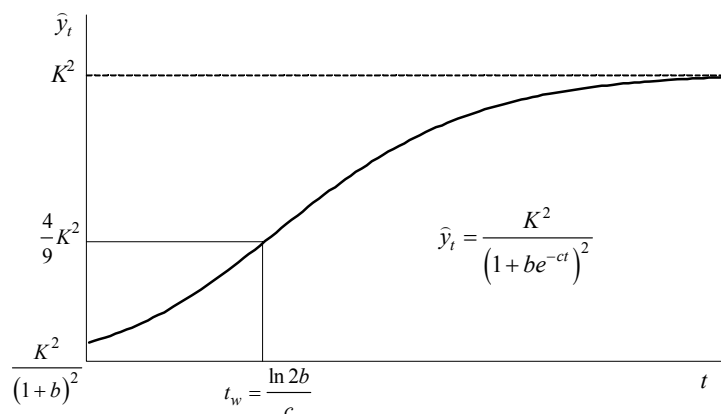
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_t = K.$$

2.3. Négyzetesen logisztikus trendfüggvény

A 4. ábra mutatja be a négyzetesen logisztikus függvény alakját és nevezetes pontjait.

⁷ Bizonyítható, hogy a harmadik derivált nem lehet 0 az adott pontban, de a bonyolult képletet nem közöljük. Kérésre a szerzők megküldik a szükséges részleteket.

4. ábra. A négyzetesen logisztikus trendfüggvény



A négyzetesen logisztikus függvény, mint a neve mutatja, a logisztikus trendfüggvény négyzete. A függvényt leíró formula:

$$\hat{y}_t = \left(\frac{K}{1 + b e^{-ct}} \right)^2 = \frac{K^2 e^{2ct}}{(e^{ct} + b)^2},$$

ahol

b – a helyzetparaméter, $b > 0$;

c – a növekedési sebességet jellemző paraméter, $c > 0$.

A függvény inflexió pontjának koordinátái:

$$\frac{d^2 \hat{y}_t}{dt^2} = \frac{2bc^2 K^2 e^{2ct} (2b - e^{ct})}{(e^{ct} + b)^4} = 0,$$

$$t_w = \frac{\ln 2b}{c},$$

$$\hat{y}_{t_w} = \frac{4}{9} K^2.$$

A harmadik derivált ebben a pontban nem egyenlő 0-val, hiszen $b > 0$, tehát itt inflexió pont van:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^3 \hat{y}_t}{dt^3} \right|_{t_w} &= 0, \\ e^{2 \ln 2b} - 7be^{\ln 2b} + 4b^2 &= 0, \\ 4b^2 - 14b^2 + 4b^2 &= -6b^2 = 0, \\ b &= 0. \end{aligned}$$

Az inflexiós ponttal jellemzett irányváltás tehát a négyzetesen logisztikus függvény esetében később következik be, mint a logisztikus trendfüggvényénél ugyanis:

$$\frac{\ln b}{c} < \frac{\ln 2b}{c}.$$

A függvény helyettesítési értéke a $t = 0$ helyen és a telítődési szint:

$$\begin{aligned} \hat{y}_0 &= \frac{K^2}{(1+b)^2}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_t &= K^2. \end{aligned}$$

2.4. Gompertz-függvény

*Benjamin Gompertz*⁸ már a XIX. század elején (*Gompertz* [1825]) felfedezte azt a halandósági törvényt, amit az állatokon végzett vizsgálatok is megerősítenek. Az emberi halandósági ráta a nemi érettség elérése idején a legkisebb, utána exponenciálisan emelkedik. Az idő ebben az esetben az életkor. *Valkovics Emil* [2001] tanulmánya például az eredeti Gompertz-formula megfelelő átalakításával újradefiniálta a halandósági tábla függvényeit, és példákkal szemléltette a Gompertz-függvény megnövekedett felhasználási lehetőségeit a demográfia egyes területein.

A Gompertz-függvény eredeti alakja (*Kotz* [2006] 14. 8727–8728. old.):

$$\begin{aligned} \hat{y} &= Kb^{c^t}, \\ \ln \hat{y} &= \ln K + c^t \ln b. \end{aligned}$$

A Gompertz-függvény az előbbi függvény továbbfejlesztése alapján egy kettős exponenciális függvény (a kitevőben is egy exponenciális kifejezés szerepel). Az

⁸ *Benjamin Gompertz* (1779–1865) biztosítási matematikus.

eredeti modell és levezetése alapján a nemzetközileg leginkább elterjedt és elfogadott forma jelenleg a következő:

$$\hat{y}_t = Ke^{be^{ct}} = K \exp\left(be^{ct}\right).$$

Ekkor logaritmálás után:

$$\ln \hat{y}_t = \ln K + be^{ct},$$

ezt a szokásos jelölésekre (pozitív paraméterek) áttérve, bevezetve a $b = -b$ és $c = -c$ jelöléseket, azt kapjuk, hogy

$$\hat{y}_t = Ke^{-be^{-ct}},$$

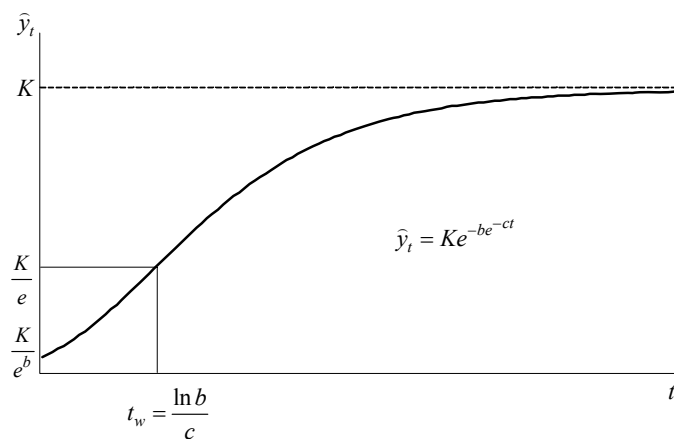
$$\ln \hat{y}_t = \ln K + (-be^{-ct}).$$

ahol

c – a növekedési sebességet jellemző paraméter, $c > 0$;
 b – a helyzetparaméter, $b > 0$.

Az 5. ábra mutatja be a függvény alakját és nevezetes pontjait.

5. ábra. A Gompertz-féle trendfüggvény



A Gompertz-függvény a logisztikus függvéynél meredekebben emelkedik a fejlődési szakaszban és így hamarabb éri el a telítettségi szintet.

A függvény inflexiós pontjának koordinátái:

$$\frac{d^2 \hat{y}_t}{dt^2} = e^{-be^{-ct}} (c^2 b^2 K e^{-2ct} - c^2 b K e^{-ct}) = 0,$$

$$t_w = \frac{\ln b}{c},$$

$$\hat{y}_{t_w} = \frac{K}{e}.$$

A harmadik derivált ebben a pontban nem egyenlő 0-val, tehát itt inflexiós pont van:

$$\left. \frac{d^3 \hat{y}_t}{dt^3} \right|_{t_w} = 0,$$

$$e^{-\ln b} - 3be^{-2\ln b} + b^2 e^{-3\ln b} = 0,$$

$$b = \pm\infty.$$

A függvény helyettesítési értéke a $t = 0$ helyen és a telítődési szint:

$$\hat{y}_0 = Ke^{-b} = \frac{K}{e^b},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_t = K.$$

2.5. A 63 százalékos trendfüggvény

A 63 százalékos függvény egyik nevezetes pontjáról kapta a nevét: a függvény a $t = T$ időpontban éri el a telítődési szint 63 százalékát.

A függvényt leíró formula:

$$\hat{y}_t = K - \frac{K}{e^{\left(\frac{t}{T}\right)^a}},$$

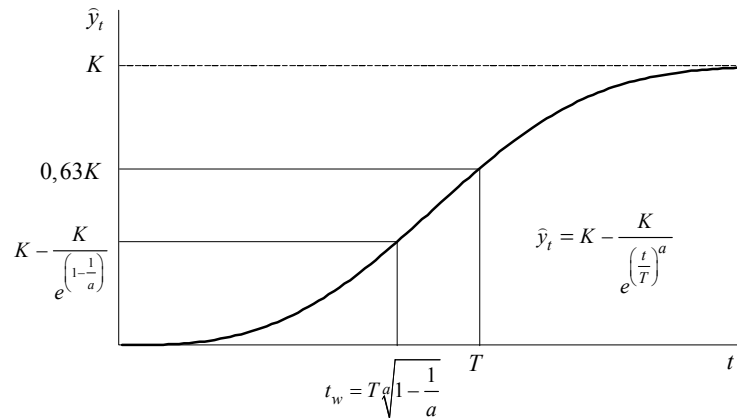
ahol

T – a helyzetparaméter, $T > 0$;

a – a növekedési sebességet jellemző paraméter, $a > 1$.

A 6. ábra mutatja a függvény alakját és nevezetes pontjait.

6. ábra. A 63 százalékos trendfüggvény



A függvény nevét adó pont, $t = T$ esetén a függvény a telítődési érték 63 százalékát veszi fel.

$$\hat{y}_T = K - \frac{K}{e} = K \left(1 - \frac{1}{e} \right) = 0,632K .$$

A függvény inflexió pontjának koordinátái:

$$\frac{d^2 \hat{y}_t}{dt^2} = -e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^a} \left[\frac{Ka^2 \left(\frac{t}{T}\right)^{2a}}{t^2} + \frac{Ka(1-a) \left(\frac{t}{T}\right)^a}{t^2} \right] = 0 ,$$

$$t_w = T \sqrt[1 - \frac{1}{a}] ,$$

$$\hat{y}_{t_w} = K - \frac{K}{e^{\left(1 - \frac{1}{a}\right)}} .$$

A harmadik derivált ebben a pontban csak akkor egyenlő 0-val, ha $a = 1$, viszont az $a > 1$, tehát az inflexió pont létezésének elégséges feltételét bizonyítottuk:

$$\left. \frac{d^3 \hat{y}_t}{dt^3} \right|_{t_w} = 0,$$

$$a^2 \left(1 - \frac{1}{a}\right)^3 + 3a(1-a) \left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 + (a-1)(a-2) \left(1 - \frac{1}{a}\right) = 0.$$

A két említett nevezetes pont $(\hat{y}_T, \hat{y}_{t_w})$, azaz a 63 százalékos és az inflexiós pont koordinátái alapján jól látható, hogy az a paraméter növekedése esetén a két pont egyre közelebb kerül egymáshoz, azaz $\lim_{a \rightarrow \infty} t_w = T$ és $\lim_{a \rightarrow \infty} \hat{y}_{t_w} = \hat{y}_T$.

A függvény helyettesítési értéke a $t = 0$ helyen és a telítődési szint:

$$\hat{y}_0 = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_t = K.$$

2.6. Johnson-trendfüggvény

A Johnson-görbe a logisztikus függvélynél gyorsabban emelkedik és nem szimmetrikus, azaz az inflexiós pont rövidebb idő alatt érhető el, tehát az inflexiós pont és a telítettségi szint közötti szakasz hosszabb. A gyors növekedést lényegesen lassúbb telítődési (érett növekedési) szakasz követi, mint a logisztikus függvény esetében.

A függvényt leíró formula:

$$\hat{y}_t = e^{\frac{K-b}{c+t}},$$

$$\ln \hat{y}_t = K - \frac{b}{c+t},$$

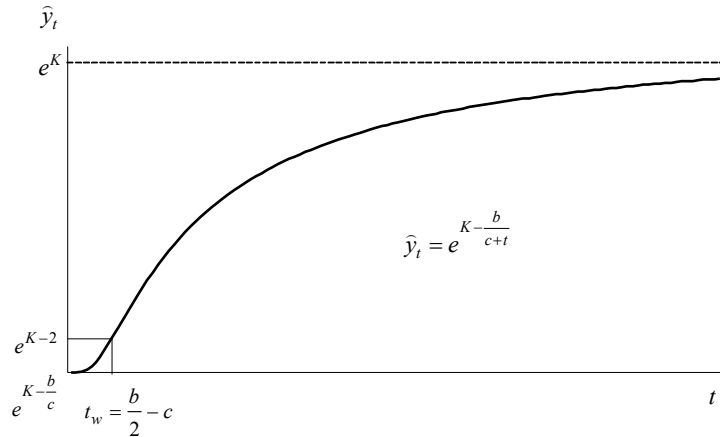
ahol

b – a helyzetparaméter, $b > 0$;

c – a növekedési sebességet jellemző paraméter, $c > 0$.

A 7. ábra mutatja be a Johnson-trendfüggvény alakját és nevezetes pontjait. Az inflexiós pont korán, a $\frac{b}{2} - c$ időpontban bekövetkezik, amit egy elnyújtott, hosszabb konkáv szakasz követ.

7. ábra. A Johnson-trendfüggvény



A függvény inflexió pontjának koordinátái:

$$\frac{d^2 \hat{y}_t}{dt^2} = \frac{be^{K-[b/(c+t)]} [b-2(c+t)]}{(c+t)^4} = 0,$$

$$t_w = \frac{b}{2} - c,$$

$$\hat{y}_{t_w} = e^{K-2}.$$

A harmadik derivált ebben a pontban nem egyenlő 0-val, mivel $b > 0$, tehát itt inflexió pont van:

$$\left. \frac{d^3 \hat{y}_t}{dt^3} \right|_{t_w} = 0,$$

$$b^2 \neq 0.$$

A függvény helyettesítési értéke a $t = 0$ helyen és a telítődési szint:

$$\hat{y}_0 = e^{K-\frac{b}{c}},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_t = e^K.$$

2.7. Az általánosított Richards-féle logisztikus trendfüggvény

Richards kiegészítette egy ν paraméterrel a Verhulst-függvényt, ezzel az inflexiós pontban aszimmetrikussá téve azt (*Richards* [1959] 290–301. old., *Xinyou Yin et al.* [2003] 361–371. old.):

$$\hat{y}_t = \frac{K}{\left(1 + \nu e^{-c(t-m)}\right)^{1/\nu}},$$

ahol

- ν – szabályozza az inflexiós pontban felvett függvényértéket, $\nu > 0$;
- c – növekedési sebességet jellemző paraméter, $c > 0$;
- m – a maximális növekedés ideje (az inflexiós pont), $m > 0$.

A függvény inflexiós pontjának koordinátái tehát, mivel a harmadik derivált nem nulla:

$$t_w = m,$$

$$\hat{y}_{t_w} = \frac{K}{(1 + \nu)^{1/\nu}}.$$

A függvény helyettesítési értéke a $t = 0$ helyen és a telítődési szint:

$$\hat{y}_0 = \frac{K}{\left(1 + \nu e^{cm}\right)^{1/\nu}},$$

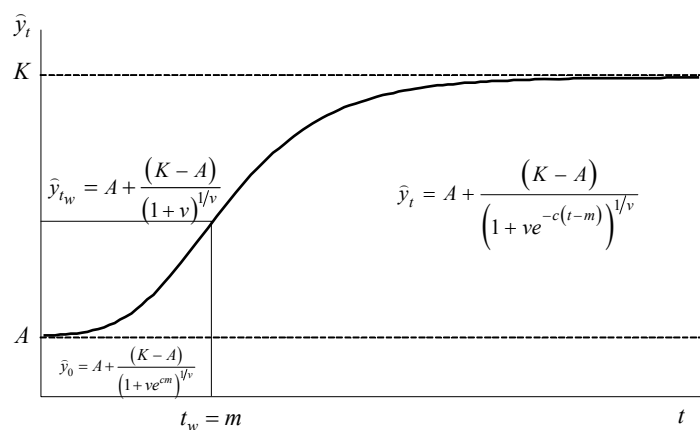
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_t = K.$$

Az általánosított Richards-féle logisztikus trendnek a hazai és a nemzetközi szakirodalomban jelenleg széles körben elfogadott képletében feloldották azt a feltételezést, hogy a függvény nem rendelkezik alsó aszimptotával (*Pella–Tomlinson* [1969], *Colin* [1999], *Fokasz* [2006] 29. old.). Ez az öt paraméterrel rendelkező függvény egy olyan S-alakú görbét határoz meg, amely pályáját az A alsó korlát és a K telítődési szint között futja be.

A függvényt leíró formula

$$\hat{y}_t = A + \frac{(K - A)}{\left(1 + ve^{-c(t-m)}\right)^{1/v}}.$$

8. ábra. Az általánosított Richards-féle trendfüggvény



A függvény inflexiós pontjának koordinátái:

$$\frac{d^2 \hat{y}_t}{dt^2} = c^2 e^{c(m+t/v)} (K - A) (e^{cm} - e^{ct}) (ve^{cm} - e^{ct})^{-(2v+1)/v} = 0,$$

$$t_w = m,$$

$$\hat{y}_{t_w} = A + \frac{(K - A)}{(1 + v)^{1/v}}.$$

A harmadik derivált ebben a pontban nem egyenlő 0-val, mivel $v > 0$, tehát itt inflexiós pont van:

$$\left. \frac{d^3 \hat{y}_t}{dt^3} \right|_{t_w} = 0,$$

$$v = -1.$$

A függvény helyettesítési értéke a $t = 0$ helyen és a telítődési szint:

$$\hat{y}_0 = A + \frac{(K - A)}{(1 + ve^{cm})^{1/v}},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_t = K.$$

Ha $A = 0$ és $v = 1$, akkor az általánosított Richards-féle trendfüggvény logisztikus függvénné alakítható:

$$\hat{y}_t = \frac{K}{1 + e^{-c(t-m)}}.$$

Ha $A = 0$ és $v \rightarrow 0$, akkor a Richards-függvény Gompertz-függvénné alakul át, mert $1 + x \approx e^x$, ha $x \rightarrow 0$ (Xinyou *et al.* [2003] 362. old.):

$$\hat{y}_t = Ke^{-e^{-c(t-m)}}.$$

Ha $A = 0$, $m = 0$ és $v = -1$ a Richards-függvény Mitscherlich-trendfüggvénné alakul:

$$\hat{y}_t = \frac{K}{(1 - e^{-c(t-0)})^{-1}} = K(1 - e^{-ct}).$$

3. Két inflexiós ponttal rendelkező trendfüggvények

Az egy inflexiós ponttal rendelkező telítődési görbék bemutatása után a két inflexiós ponttal rendelkező trendek közül az életgörbe⁹ és Hubbert-függvényeket ismer-tetjük.

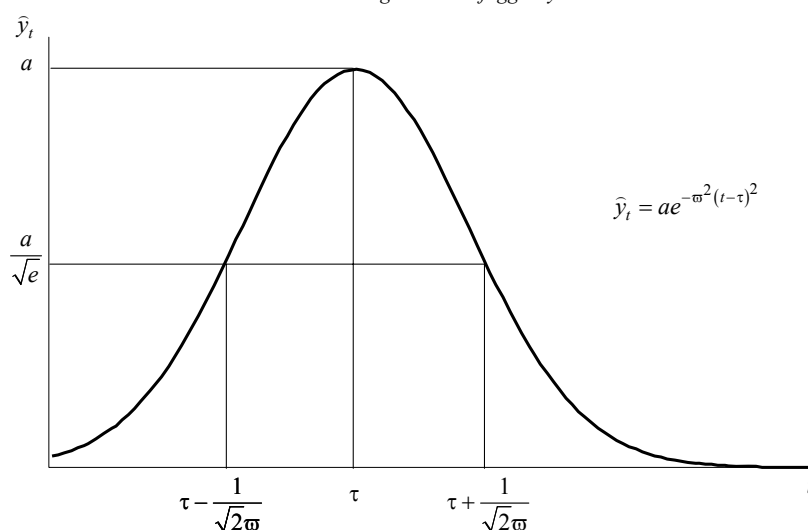
3.1. Életgörbe trendfüggvény

Az életgörbe trendfüggvény a termékéletgörbe alakulását mutatja, nevét is innen kapta, mivel a termék piaci forgalmának (volumenének) alakulását ábrázolja az idő

⁹ Hausteine [1972] az életgörbe trendet ökológiai függvénynek nevezi.

függvényében. A következő – a marketing szakirodalmában ismert – szakaszokat lehet megkülönböztetni: keletkezés, bevezetés, növekedés, érettség (telítődés, itt éri el a forgalom a maximális értéket), tehát eddig egy S-alakú trenddel leírható a folyamat alakulása, s ezt követően történik a változás, a telítődést követi a hanyatlás. A termék kereslete egy bizonyos idő után drasztikusan csökkenhet. Dönteni kell a termék gyártásának leállításáról, a piacról való kivonásról. A 9. ábra mutatja be az életgörbe függvény alakját és nevezetes pontjait.

9. ábra. Az életgörbe trendfüggvény



A vállalatgazdasági szakemberek általánosan elfogadják a termékéletgörbék leírását a következő trendfüggvénnyel (Korán [1978] 123–124. old., Kotler–Keller [2006] 189. old., Iványi [1984] 28–29. old.):

$$\hat{y}_t = a e^{-\omega^2(t-\tau)^2} = \frac{a}{e^{\omega^2(t-\tau)^2}},$$

ahol a termék életgörbe alakulásának megfelelően:

- \hat{y}_t – a termékből a t -edik évben értékesített mennyiség becstült értéke;
- a – az éves értékesítési volumenek várható maximuma;
- ω – a görbe alakját, az inflexiós pontok helyét meghatározó alakparaméter;
- τ – a maximális értékesítés várható időpontja.

A függvény maximuma, mivel ebben a pontban az első derivált nulla és a második derivált a τ pontban negatív:

$$\frac{d\hat{y}_t}{dt} = 2a\omega^2 (\tau - t) e^{-\omega^2(t-\tau)^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} t_{\max} &= \tau, \\ \hat{y}_{t_{\max}} &= a. \end{aligned}$$

A függvény inflexiósi pontjai:

$$\frac{d^2 \hat{y}_t}{dt^2} = 2a\omega^2 e^{-\omega^2(t-\tau)^2} [2\omega^2(t-\tau)^2 - 1] = 0,$$

$$t_{w_1; w_2} = \tau \pm \frac{1}{\sqrt{2}\omega},$$

$$\hat{y}_{t_{w_1; w_2}} = \frac{a}{\sqrt{e}}.$$

Bizonyítható, hogy a harmadik derivált ezekben a pontokban nem egyenlő 0-val, tehát ebben a pontban inflexiósi pont van.

A függvény helyettesítési értéke a $t = 0$ helyen és a telítődési szint:

$$\hat{y}_0 = \frac{a}{e^{(\omega\tau)^2}},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_t = 0.$$

Az életgörbe trendfüggvény és a normális eloszlás sűrűségfüggvénye közötti összefüggést az alábbiakban mutatjuk be (*Haustein* [1972] 186–187. old.). Amennyiben

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}},$$

úgy

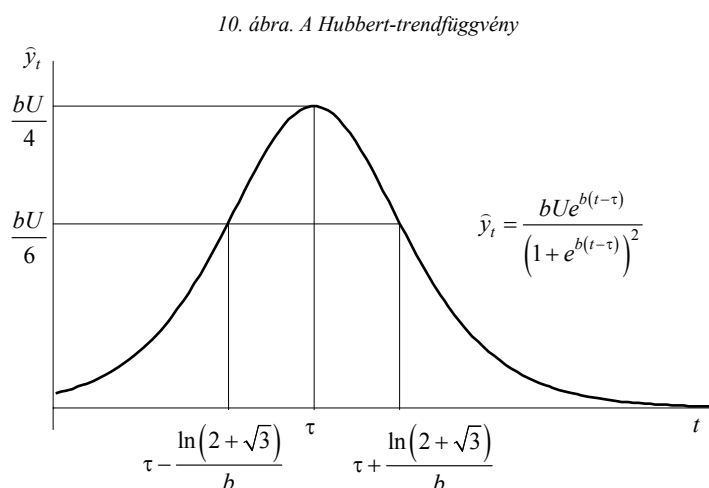
$$\hat{y}_t = a e^{-\omega^2(t-\tau)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\tau)^2}$$

a τ várható értékű, σ^2 varianciájú normális eloszlás sűrűségfüggvénye.

3.2. Hubbert-trendfüggvény

A Hubbert-féle trendfüggvény alapján olajhozamcsúcsnak nevezzük a kőolaj kitermelésének időbeli tetőzését. Az olajhozamcsúcs az ún. Hubbert-féle csúcsmélelet alapján számítható, amelyet *Hubbert* [1956], a Shell Oil Kutatólaboratórium geofizikusa 1956-ban alkotott meg. Az elmélet az Egyesült Államok kőolaj-kitermelésének maximumát 1965–1970 időszakra becsülte. Ezzel mindössze egy évet tévedett, az Egyesült Államok kitermelési csúcsa 1971-ben volt. A földgáz, a kőszén, a vasérc, valamint más nyersanyagok rendelkezésre álló mennyisége – hasonlóan a kőolajhoz – véges, így termelésük hosszú távon a Hubbert-függvénnyel prognosztizálható.

*Hubbert*¹⁰ matematikai modelljét egy olajmező várható élettartamának modellezésére dolgozta ki. A modell alkalmazható egyes területek vagy akár az egész Föld készleteire is.¹¹ A 10. ábra mutatja be a Hubbert-trendfüggvény alakját és nevezetes pontjait.



A függvényt leíró formula (*Laherrère* [2000]):

$$\hat{y}_t = \frac{bUe^{b(t-\tau)}}{(1 + e^{b(t-\tau)})^2} = \frac{bUe^{b(t+\tau)}}{(e^{bt} + e^{b\tau})^2},$$

¹⁰ *Marion King Hubbert* (1903–1989). Kutatási eredményei: www.hubbertpeak.com/hubbert/Bibliography.htm. (Elérés dátuma: 2009. január 28.)

¹¹ *Hubbert* 1956-ban megjelent tanulmányában azt prognosztizálta (www.hubbertpeak.com/hubbert/1956/1956.pdf), hogy például a texasi kőolaj- és földgáztermelés 1973-ban eléri a csúcstermelést, majd ezt követően a termelés csökkenni fog és 2050-ben meg fog szünni. A Hubbert-prognózist napjainkig igazolta az idő.

ahol

b – a meredekséget kifejező, vagyis az emelkedést (a felszálló ágat) és az ereszkedést (leszálló ágat) leíró, az inflexiós pontokat meghatározó alakparaméter;

U – a teljes Hubbert-trend becsült értékeinek összege,¹² az időtengelyen;

τ – az az időpont, ahol a görbének csúcspontja van.

A függvény maximuma, mivel ebben a pontban az első derivált nulla és a második derivált a τ pontban negatív:

$$\frac{d\hat{y}_t}{dt} = \frac{b^2 U e^{b(t+\tau)} (e^{b\tau} - e^{bt})}{(e^{b\tau} + e^{bt})^3} = 0,$$

$$t_{\max} = \tau,$$

$$\hat{y}_{t_{\max}} = a.$$

A függvény inflexiós pontjai:

$$\frac{d^2 \hat{y}_t}{dt^2} = 0,$$

$$e^{2bt} - 4e^{b(t+\tau)} + e^{2b\tau} = 0,$$

$$t_{w_1;w_2} = \tau \pm \frac{\ln(2 + \sqrt{3})}{b} \approx \tau \pm \frac{1,317}{b},$$

$$\hat{y}_{t_{w_1;w_2}} = \frac{bU}{6}.$$

A függvény helyettesítési értéke a $t = 0$ helyen és a telítődési szint:

$$\hat{y}_0 = \frac{bUe^{-b\tau}}{(1 + e^{-b\tau})^2},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}_t = 0.$$

¹² Ultimate recovery of crude oil: the total resource available (a kőolaj utolsó kitermelése, vagyis az összes elérhető készlet).

4. Az Excel parancsfájl működése

A szerzők által kidolgozott fájl (logisztikustrendekbecslése.xls)¹³ a bemutatott tizenkét trendfüggvény illesztését könnyíti meg a felhasználók számára. Tizenkét munkalapot tartalmaz, melyek a különböző függvényformák nevei alapján kerültek elnevezésre, valamint egy Ciklus nevű munkalapot, mely a különböző illesztett trendek alapján hosszú távú ciklusok vizsgálatát teszi lehetővé. A rövid és a hosszú ciklusok vizsgálata jelen tanulmányunknak nem témája (Sipos [2006], Kehl–Sipos [2007a, b]). A fájlban a cellák színezése jelentőséggel bír: a halványsárga cellák szabadon változtathatók, a zöld cellák az egyes paraméterek javasolt kezdeti értékeit adják meg, míg a fehér cellák számítási (rész)eredményeket tartalmaznak. A színezés alapján látható, hogy a fájl maximálisan 1000 hosszúságú idősor feldolgozására képes. Az egyes munkalapok között nincs összefüggés, azaz amennyiben több trendet kíván a felhasználó illeszteni ugyanarra az adatsorra, úgy az adatokat valamennyi kiválasztott lapra be kell másolnia. A fájl az adatok beillesztését követően azonnal ábrázolja az idősort, valamint az aktuálisan bevitt paraméterek alapján a trendfüggvényt is. Az Idő oszlop kitöltése opcionális, amennyiben kitöltésre kerül, úgy az ábrázolás esetén ezt figyelembe veszi a fájl az időtengely felirataként.

A javasolt kezdeti paraméterek az egyes függvények nevezetes pontjai (maximálisan felvett érték, első időszak megfigyelésének értéke, inflexiós pont stb.) alapján kerültek meghatározásra. A Pearl–Reed-féle logisztikus függvény példáján keresztül mindez azt jelenti, hogy a K paraméter javasolt értéke az idősorban található maximális értékkel egyezik meg ($\tilde{K} = y_{\max}$). A b paraméter kezdő értékének meghatározása az

$$\hat{y}_0 = \frac{K}{1+b} \approx y_1$$

összefüggés alapján

$$\tilde{b} \approx \frac{\tilde{K}}{y_1} - 1$$

módon történik, ahol \sim -mal az adott paraméter közelítő, kezdeti értékét jelöljük. Az inflexiós pont nyújt segítséget a harmadik paraméter közelítő meghatározásához. A fájl megkeresi az inflexiós pontban felvett $K/2$ függvényértékhez legközelebb eső, de annál kisebb tényleges időszori értéket, amiből t_w feltételezett értéke következik.

¹³ A parancsfájl letölthető a *Statisztikai Szemle* honlapjáról (www.ksh.hu/statszemle).

Ekkor

$$\tilde{c} = \frac{\ln \tilde{b}}{\tilde{t}_w}$$

alapján következtethetünk c közelítő értékére. A többi trend esetén az ajánlott kezdőértékek teljesen hasonló módon kerültek meghatározásra, a levezetéseket az Excel fájlból kiolvasható függvények alapján az Olvasóra bízuk.

Az induló paraméterek ilyen módon történő meghatározása azt okozhatja, hogy amennyiben olyan jelenséget vizsgálunk, amely már „lefutott”, és az illeszteni kívánt függvény alkalmas, úgy a kezdő paraméterek megadásával jól illeszkedő függvényt kapunk. Amennyiben egy telítődési, vagy életciklus-folyamat elején tartó jelenséget vizsgálunk, úgy a feltüntetett paraméterek helyett szakértői, elemzői tapasztalatra kell támaszkodni. Az induló paraméterek természetesen nem minden esetben adnak tökéletes javaslatot, így lehetőség van a paraméterek kézi vezérlésére is. Valamennyi munkalap tartalmaz olyan parancsgombokat, melyek a paraméterek finomhangolását végzik el (Opt. mind). A parancsgombok az Excel beépített Solver funkcióját hívják meg, a célfüggvény pedig az R^2 maximalizálása az egyes paraméterek iteratív változtatásával. Lehetőség van arra is, hogy a Solver a (kézzel, szakértői becslés alapján beállított) telítődési paraméter értékén ne változtasson, ekkor csupán a többi paraméter nagyságát fogja a program meghatározni (Opt. K nélkül). Az Excel beépített Solver csomagja nem képes minden esetben globális optimumot találni,¹⁴ így érdemes az illesztést több különböző, kézzel beállított indulóértékkel elvégezni. Főként az életgörbe és Hubbert függvények esetén problémát okozhat a paraméterek nagyságrendjének jelentős eltérése. A Solver ebben az esetben a túlságosan nagy paramétert nem mozdítja el kezdeti értékéről. A megoldás az eredeti adatsor dimenziójának változtatása (például 1000-rel való osztás). A fájl

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_t (y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_t (y_t - \bar{y}_t)^2} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

módon számít, ahol SSE (Sum of Squared Errors) a reziduumok négyzetösszege; SST (Sum of Squares Total) a teljes eltérés négyzetösszeg.

A kielégítőnek ítélt paraméterek megtalálása után az extrapoláció beállításával lehetőség van a trend mechanikus kiterjesztésére (a megfigyelések száma az extrapolációval együtt sem lépheti át az 1000 darabot). A Ciklus munkalapon az illesztett

¹⁴ A piacon elérhető globális optimumot meghatározó, Excelbe beépülő Solverek is, ám ezek nem ingyenesek.

trendek további vizsgálatára (reziduumok ábrázolása, mozgóátlagolása) és összehasonlítására nyílik lehetőség. A Ciklus munkalap valamennyi esetben az adott függvény saját munkalapján beállított paraméterezés alapján dolgozik.

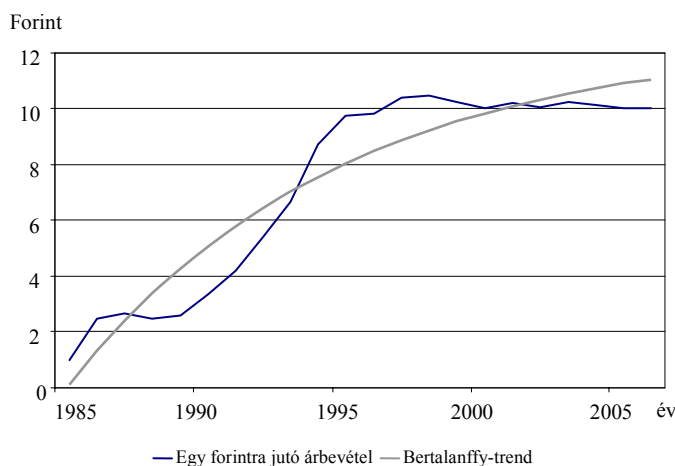
5. Gyakorlati alkalmazások

A továbbiakban az ismertetett görbék illesztésével kapcsolatban három gyakorlati példát mutatunk be. A példák rendre a bemutatott függvénycsaládokat mutatják be.

Az eladott lakások árbevételének kapcsolata a reklám és marketing kiadásokkal

Az első példában egy ingatlanforgalmazó iroda adatait vettük alapul, amely új építésű ingatlanokat értékesít. 1985 és 2007 között rendelkezésünkre álltak a marketing és reklám kiadások, valamint az eladott lakásokból származó árbevétel. A reklám költségek – tapasztalatok szerint – nem az árbevétellel arányosan nőnek. Van egy bizonyos szint, arány, amelynél hatékony a reklám- és marketingmunka. A 11. ábra mutatja a marketing- és reklámkiadások egy forintjára jutó árbevétel évenkénti alakulását, a stagnálás 2000-től állandósult, a telítődési paraméter 10 forint körül van.

11. ábra. A reklámköltségek egy forintjára jutó árbevétel alakulása

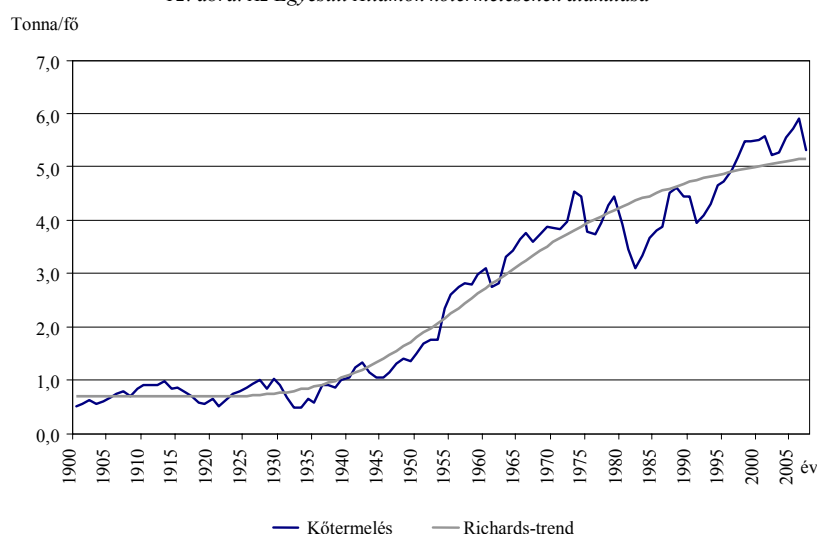


A legjobb illeszkedést (az inflexiós ponttal nem rendelkező függvények alkalmazásával) a Bertalanffy-trend esetén értük el, $R^2 = 0,9005$ -ös érték mellett.

A kőtermelés alakulása

Az elméletben bemutatott hét darab, egy inflexiós ponttal rendelkező függvény illesztésének illusztrációjára az Egyesült Államok kőtermelésének idősorát választottuk ki, ami 1900-tól áll rendelkezésre. A legjobb illeszkedést, főként a paraméterek számának köszönhetően, a Richards-féle trend mutatta.

12. ábra. Az Egyesült Államok kőtermelésének alakulása



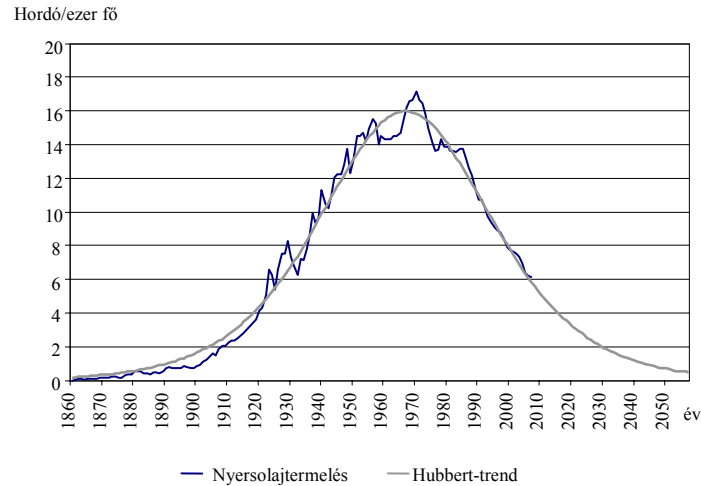
A nyersolajtermelés alakulása

Amint azt már említettük, Hubbert 1956-ban készült prognózisa szerint a nyersolajtermelésben a fordulópont az 1970-es évek elején várható az Egyesült Államokban, amikor a növekedő szakaszt egy csökkenő váltja fel.

A Hubbert-prognózis teljesülését mutatja be a 13. ábra, ahol a csúcs- és fordulópont 1970-ben volt az Egyesült Államok nyersolajtermelésének a népességszámmal korrigált idősorában, 1860 és 2007 között.

A két, elméletben bemutatott trend közül a Hubbert-trend illeszkedését mutatjuk be a kiválasztott idősorra, de az életgörbe illesztése is nagyon hasonló függvényképet eredményez. A magyarázó erő mindkét esetben igen magas, 99 százalék körüli. Az ábra elkészítésekor 50 évnyi extrapolációt állítottunk be, annak érdekében, hogy az Egyesült Államok nyersolajtermelésének prognosztizált értékeit is figyelemmel lehessen kísérni.

13. ábra. Az Egyesült Államok nyersolajtermelésének alakulása



*

Jelen tanulmányunkban telítődési, logisztikus és életgörbe alakú trendfüggvények becslésével foglalkoztunk. Bemutattuk a függvények egy lehetséges csoportosítását, a szóban forgó függvények nevezetes pontjait és tulajdonságait. Dolgozatunk részét képezi egy Excel formátumú fájl is, amely a függvények illesztését könnyíti meg a felhasználó számára. A fájl a részletesen bemutatott trendek illesztését végzi el a paraméterek változtatásával. Az Excel beépített Solver nem képes ilyen jellegű problémák esetén a globális optimum meghatározására, de a kézzel beállított paraméterek „finomhangolására” megfelelő. A tanulmány lezárásaként a különböző típusú trendek alkalmazására egy-egy példát mutattunk be.

Irodalom

- BERTALANFFY, L. [1938]: A Quantitative Theory of Organic Growth. (Inquiries on Growth Laws II.) *Human Biology*. 10. sz. 181–213. old.
- BERTALANFFY, L. [1960]: Principles and Theory of Growth. In: *Fundamental Aspects of Normal and Malignant Growth*. Amsterdam. 137–259. old.
- BESENYEI L. – GIDAI E. – NOVÁKY E. [1977]: *Jövőkutatás, előrejelzés a gyakorlatban*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest.
- COLIN, P. D. B. [1999]: A New Generalized Logistic Sigmoid Growth Equation Compared with the Richards Growth Equation. *Annals of Botany*. 83. évf. 6. sz. 713–723. old.

- DAGUM, C. [1985]: Analyses of Income Distribution and Inequality by Education and Sex in Canada. *Advances in Econometrics*, IV. évf. 167–227. old.
- DESCARTES [1961]: *Válogatott filozófiai művek*. Akadémiai Kiadó. Budapest.
- FARNUM, N. R. – STANTON LAVERNE, W. [1989]: *Quantitative forecasting methods*. PWS-Kent Publishing Company. Boston.
- FOKASZ N. [2006]: Növekedési függvények, társadalmi diffúzió, társadalmi változás. *Szociológiai Szemle*. 3. köt. 19–51. old.
- FRESCHL GY. [1982]: *Bevezetés az időszori módszerek gyakorlatába*. Statisztikai módszertani füzetek. KSH. Budapest.
- GÁL P. – MOLDICZ CS. – NOVÁK T. [2004]: Gazdasági ciklusok és gazdaságpolitika a 21. század elején. *Fejlesztés és finanszírozás*. 4. sz. 13–26. old.
- GOMPERTZ, B. [1825]: On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 115. évf. 513–585. old.
- HAUSTEIN H. D. [1972]: *Prognózismódszerek a szocialista gazdaságban*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest.
- HERMAN S. – VARGA J. [1983]: A szezonális átrendeződés vizsgálata. *Statisztikai Szemle*. 61. évf. 6. sz. 625–641. old.
- HERMAN S. [1985]: A szezonális vizsgálat statisztikai módszerei. IGK. Időszerű gazdaságirányítási kérdések. Prodinform Műszaki Tanácsadó Vállalat. Budapest.
- HUBBERT, M. K. [1956]: *Nuclear Energy and the Fossil Fuels*. Munkaanyag. San Antonio.
- HUNYADI L. [2004]: A logisztikus függvény és a logisztikus eloszlás. *Statisztikai Szemle*. 82. évf. 10–11. sz. 991–1011. old.
- IVÁNYI A. SZ. [1984]: *Termékstratégia, gyártáspolitikai, műszaki fejlesztés*. Műszaki könyvkiadó. Budapest.
- JOHNSON, N. L. [1949]: Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation. *Biometrika*. 36. évf. 1–2. sz. 149–176. old.
- KEHL D. – SIPOS B.: [2007a]: Évszázados trendek és hosszú ciklusok az Amerikai Egyesült Államokban, Kínában és a világ gazdaságban. *Hitelintézet Szemle*. 6. évf. 3. sz. 248–282. old.
- KEHL D. – SIPOS B. [2007b]: A gazdasági növekedés ciklikus változása az USA-ban. *Fejlesztés és Finanszírozás*. 4. sz. 3–12. old.
- KERÉKGYÁRTÓ GY. – MUNDRUCZÓ GY. – SUGÁR A. [2001]: *Statisztikai módszerek és alkalmazásuk a gazdasági, üzleti elemzésekben*. Aula Kiadó. Budapest.
- KERÉKGYÁRTÓ GY. – MUNDRUCZÓ GY. [1995]: *Statisztikai módszerek a gazdasági elemzésben*. Aula Kiadó. Budapest.
- KORÁN I. [1978]: *Gazdasági prognosztika*. Tankönyvkiadó. Budapest.
- KOTLER P. – KELLER K. L. [2006]: *Marketing – menedzsment*. Akadémiai Kiadó. Budapest.
- KOTZ, S. ET AL. [2006]: *Encyclopedia of Statistical Sciences*. 16 köt. Wiley Interscience. Canada. New Jersey.
- LAHERRÈRE, J. H. [2000]: Learn Strengths, Weaknesses to Understand Hubbert Curve. *Oil and Gas Journal*. April 17. <http://dieoff.org/page191.htm> (Elérés dátuma: 2009. január 28.)
- LIAO, C. Y. – PODRÁZSKÝ, V. V. – LIU, G. B. [2003]: Diameter and Height Growth Analysis for Individual White Pine Trees in the Area of Kostelec nad Černými lesy. *Journal of Forest Science*. 49. évf. 12. sz. 544–551. old.

- LILIEN, G. L. – KOTLER, P. [1983]: *Marketing Decision Making*. Harper & Row Publishers. New York.
- MITSCHERLICH, E. A. [1919]: Das Gesetz des Pflanzenwachstums. *Landwirtschaftliche Jahrbücher*. 53. évf. 2. sz. 167–182. old.
- MOLNÁR GY. – CAPÓ B. [2003]: A képességek fejlődésének logisztikus modellje. *Iskolakultúra*. 2. sz. 57–69. old.
- NOVÁKY E. (szerk.) [1992]: *Jövőkutatás*. Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem. Budapest.
- PEARL, R. – REED, L. J. [1920]: On the Rate of Growth of the Population of the United States since 1790 and its Mathematical Representation. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 6. évf. 6. sz. 275–288. old.
- PEARL, R. [1929]: The Biology of Population Growth. *The American Journal of Sociology*. 35. évf. 3. sz. 403–410. old.
- PELLA, J. S. – TOMLINSON, P. K. [1969]: *A Generalised Stock-production Model*. Bulletin. Inter-American Tropical Commission. 13. köt. 421–496. old.
- PINTÉR J. – RAPPAI G. (szerk.) [2007]: *Statisztika*. Pécsi Tudományegyetem, Közgazdaságtudományi Kar. Pécs.
- RAPPAI G. [2001]: *Üzleti statisztika Excellel*. KSH. Budapest.
- RICHARDS, F. J. [1959] A Flexible Growth Function for Empirical use. *Journal of Experimental Botany*. 10. évf. 2. sz. 290–301. old.
- SIPÓS B. [2006]: Hosszú-ciklusok és évszázados trendek alakulása a magyar mezőgazdaságban. *Statisztikai Szemle*. 84. évf. 2. sz. 150–175. old.
- THEISS E. (szerk.) [1958]: *Korreláció és trendszámítás*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest.
- VALKOVICS E. [2001]: A Gompertz-függvény felhasználási lehetőségei a demográfiai modellezésben. *Statisztikai Szemle*. 79. évf. 2. sz. 121–141. old.
- VERHULST, P. F. [1838]: Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique*. 10. sz. 113–121. old.
- XINYOU YIN ET AL. [2002]: A Flexible Sigmoid Function of Determinate Growth. *Annals of Botany*. 91. évf. 12. sz. 361–371. old.
- http://wapedia.mobi/en/Generalised_logistic_function (Elérés dátuma: 2009. január 28.)
- <http://www.bioss.ac.uk/smart/unix/mgrow/slides/slide02.htm> (Elérés dátuma: 2009. január 28.)
- http://www.horticultureandlandscape.rdg.ac.uk/hlm_richards.htm (Elérés dátuma: 2009. január 28.)

Summary

The logistic and life curves can play a significant role in forecasting long-term economic and demographic processes. These functions assume a slow growth in the beginning that accelerates in time and finally, after the inflectionary point the pace of growth decreases. As the curve approaches the saturation level, the absolute growth converges to zero. The curves can be useful in describing processes and phenomena that include non-constant and bounded (saturating) changes. Their practical application was limited because of the fact that these curves cannot be transformed to a linear function, and therefore, a non-linear system of equations had to be solved, which was problematic.

The task was to find those parameters for which the fitting of the function is the most accurate. To solve this problem, we created an MS Excel file. The program finds the parameters providing the best fit by changing the recommended initial parameter vector using a trial-and-error method, and it also plots the function itself.