EGY NEMZETKÖZI ÖSSZEHASONLÍTÁSOKNÁL FELLÉPŐ INDEXSZÁMÍTÁSI PROBLÉMÁRÓL

ÉLTETŐ ÖDÖN — DR. KÖVES PÁL

Az időbeli változásokat mérő indexszámítás mellett egyre nagyobb jelentőségre tesz szert az ipari vagy mezőgazdasági termelés, a lakosság fogyasztása stb. mennyiségének vagy az árszínvonalnak országok közötti összehasonlítása indexszámítás segítségével. Az ipar és mezőgazdaság, a termelés és fogyasztás stb. több olyan sajátossággal rendelkezik, amelyeket az indexszámítás gyakorlatában figyelembe kell venni, továbbá egynémely tekintetben más problémák léphetnek fel a volumenindex-számításnál mint az árindexszámításnál. Mégis az indexszámítás legfőbb módszertani problémái népgazdasági ágra stb. való tekintet nélkül messzemenően közösek. Ebben a cikkben csakis ilyen közös problémákkal foglalkozunk. Az egyes területek sajátos vonásai egyáltalán nem teszik értelmetlenné azt a törekvést, hogy általános érvényű megállapításokat tegyünk, és hogy az általános problémák megoldása érdekében — általános érvényű módszereket dolgozzunk ki. Más kérdés, hogy elsősorban bizonyos gyakorlati nehézségek egyes területeken nem mindig teszik lehetővé, hogy az elméletileg legjobbnak talált módszert alkalmazzuk. Ilyenkor is azonban — az adott körülmények között alkalmazható legjobb megoldás keresése során — támaszkodnunk kell az általános elméleti megállapításokra.

1. „LEGJOBB" FORMULA KÉT ORSZÁG ÖSSZEHASONLÍTÁSA ESETÉN

Az országok közötti összehasonlítás legegyszerűbb esete az, amikor csak két országot kívánunk összehasonlítani. Ebben az „egyszerű" esetben is számos probléma merül fel.

Általánosan elfogadott követelmény például, hogy a két ország meghatározott szempontokból való összehasonlítása céljából számított volumen- és árindex szorzata egyenlő legyen az értékindexszel. Magától értetődő továbbá az a követelmény, hogy az 1. országot a 2. országgal összehasonlítható index összhangban álljon a 2. országot az 1. országhoz hasonlító indexszel, vagyis a két index között reciprok-viszony álljon fenn. (Ha például megállapítjuk, hogy az 1. ország termelése éppen kétszerese a 2. országénak, akkor az egyben jelentse azt is, hogy a 2. ország termelése pontosan feleakkora, mint az 1. országé.)

Vannak bizonyos egyszerű módszerek a fenti két követelmény teljesítésére. Megtehetjük, hogy az időbeli összehasonlításnál alkalmazott egyszerűbb (ún. Laspeyres- és Paasche-típusú) formulák mintájára minden összehasonlításnál csak az egyik ország súlyadatait használjuk fel. Ha a volumenindexnél az egyik ország áradatait, az árindexnél a másik ország mennyiségi adatait használjuk fel, akkor a volumen- és árindex szorzata egyenlő az értékindexszel, tehát az első követelmény teljesül. Továbbá, ha a két ország összehasonlításánál — akár az 1. országot hasonlítjuk a 2.-hoz, akár fordítva — csak az egyik ország súlyadatait használjuk fel a volumen- vagy az árindex kiszámítására, akkor a kívánt reciprok-viszony is fennáll.

Ez az eljárás azonban joggal kifogásolható. Ha például két ország mezőgazdasági termelését hasonlítjuk össze oly módon, hogy az egyik ország árait használjuk fel, akkor a két ország összehasonlításánál viszonylag nagyobb súllyal szerepelnek azok a termékek, amelyek az árakat szolgáltató országban viszonylag drágábbak, ezek pedig általában éppen azok a termékek, amelyekből ebben az országban viszonylag keveset termelnek. Így a termelt mennyiségek összehasonlításánál azt az országot, amelynek árait használjuk, szisztematikusan kedvezőtlen színben tüntetjük fel. Az árindexszámításban viszont az az ország kerül kedvezőbb helyzetbe, amelyiknek mennyiségi adataival súlyozunk. A mezőgazdasági termelés esetében frappáns módon érvényesül az ismertetett összefüggés (ezért választottuk példának), de más területeken is hasonló a helyzet.

Ha a két országot összehasonlító index kiszámításánál csak az egyik ország súlyadatait használjuk fel, az összehasonlítandó országok között nyilvánvalóan önkényes megkülönböztetést kell alkalmazni. A két korábban említett követelmény mellett kiköthetjük harmadik fontos követelménynek az önkényesség kizárását. Bebizonyítható, hogy ezt a három követelményt együttesen csak az az indexformula elégíti ki, amelyik *az egyik és másik ország súlyaival számított indexek mértani átlagolásával* (analóg az időbeli indexszámítás ún. Fisher formulájával) állítható elő. Ez a formula sem tökéletes (lehetne olyan követelményt támasztani, amelyiknek nem tesz eleget), de a legfontosabb követelmények tükrében ezt tartjuk a legjobbnak. Hozzátehetjük, hogy tökéletes indexformula egyáltalán nincs, aminek okaira itt nem kívánunk kitérni.

Gyakran találkozunk olyan véleménnyel, hogy az ellentétesen súlyozott indexek átlagának nincs közgazdasági tartalma. E nézet hirdetői csak azoknak az indexformuláknak tulajdonítanak közgazdasági tartalmat, amelyek valamilyen könnyen érthető kérdésre adnak választ. Az egy ország súlyaival számított indexek kétségtelenül ilyenek. Láttuk azonban (a mezőgazdasági termelés volumenindexének példáján), hogy az ilyen indexek *közgazdasági szempontból* joggal kifogásolhatók. A két, közgazdaságilag ellentétes irányban torzító index átlagolásával a közgazdasági valóság több elemét megragadó és így közgazdaságilag helyesebb indexet kapunk. Sokan azt a körülményt, hogy a Fisher-formula alkalmazása mellett szóló érvek matematikailag is alátámaszthatók, illetve matematikai formában fejezhetők ki, úgy értelmezik, hogy ezek nem közgazdasági, hanem matematikai érvek és ezért szerintük nem döntők. Az ilyen szembeállítás nyilván tarthatatlan. A matematikai gondolatmenet igénybevétele nem csökkenti, hanem növeli a közgazdasági kutatás hatékonyságát. A jelenleg tárgyalt egyszerű esetnél bonyolultabb esetekben, vagyis, ha az összehasonlítandó országok száma több kettőnél, még inkább szükség van a matematikai eszközökre, csak ezek segítségével találhatjuk meg azt a megoldást, amelyik a lehetőség határain belül a legnagyobb mértékben garantálja az indexek közgazdasági tartalmát.

2. KÜLÖNBÖZŐ LEHETŐSÉGEK TÖBB ORSZÁG ÖSSZEHASONLÍTÁSA ESETÉN

Kettőnél több ország összehasonlítása esetén egy újabb követelményt is támaszthatunk: a páronkénti összehasonlítások legyenek összhangban egymással, illetve a többoldalú összehasonlításokkal. E követelmény értelmében például a 2. országot az 1. országgal összehasonlító index, valamint a 3. országot a 2. országgal összehasonlító index szorzatának egyenlőnek kell lennie azzal az indexszel, amelyik a 3. országot az 1.-höz viszonyítja. Megjegyzendő, hogy ez az újabb követelmény a korábban említett követelmények egyikét, a reciprokviszony fennállását is magában foglalja.

Ha legfontosabb követelménynek a fent említett összhangot tekintjük, akkor kézenfekvő módszer egy önkényesen kiválasztott ország súlyadatainak felhasználása az összes indexek kiszámításánál. Így viszont az egyes indexek kisebb-nagyobb mértékben, egyes indexek esetleg igen jelentős mértékben eltérnek a megfelelő „lehető legjobb" indextől. A módszer különböző eredményekhez vezet attól függően, hogy melyik az az ország, amelyiknek adatait a súlyozásnál felhasználtuk. Egy korábbi példa tükrében nyilvánvaló, hogy volumenindexeket számítva általában az az ország kerül leghátrányosabb helyzetbe, amelyiknek áraival számítunk. Árindexszámítás esetén viszont a mennyiségi adatokat szolgáltató országnak kedvezünk. További hátrány, hogy ha ezzel a módszerrel egyidejűleg volumen- és árindexeket is számítunk, szorzataik nem adják ki a megfelelő értékindexeket.

Legyen az összehasonlítandó országok száma n, egy adott termék, cikk termelt, fogyasztott stb. mennyisége az egyes országokban: $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Az egységárak: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. A j-edik országot a k-adik országhoz (ahol j és k értéke 1-től n-ig terjed) hasonlító volumenindex (a képletek és a gondolatmenetek a továbbiakban értelemszerűen az árindexre is vonatkoznak) képlete, ha az 1. ország áraival súlyozunk:

$$I_{jk} = \frac{\Sigma q_j p_1}{\Sigma q_k p_1}$$

A továbbiakban nem soroljuk fel az összes lehetséges módszereket, csupán azok közül említünk meg néhányat, amelyek követelményeink szemszögéből „esélyesek" arra, hogy kedvezően vélekedjünk róluk.

Az alábbi öt módszer mindegyike a fontosnak minősített követelmények közül csak egyet-egyet sért meg.

a) Az összehasonlításba bevont mindegyik országot közvetlenül összehasonlítjuk az összes többivel a cikkünk 1. pontjában legjobbnak minősített formula segítségével: azaz a j-edik és k-adik ország közötti indexet az

$$I_{jk} = \sqrt{\frac{\Sigma q_j p_k}{\Sigma q_k p_k} \cdot \frac{\Sigma q_j p_j}{\Sigma q_k p_j}}$$

formula szolgáltatja. Így azonban az újonnan bevezetett követelménynek általában nem tudunk eleget tenni, a megkívánt összhang nincs biztosítva a különböző összehasonlítások között. A többi követelmény teljesül.

b) Kiválasztunk egy országot, legyen például ez az 1. ország, az összes többit ezzel közvetlenül összehasonlítjuk a „legjobb" formula segítségével, azaz

$$I_{j1}^{(b)} = I_{j1}$$

A többi viszonylat indexeit közvetve számítjuk ki:

$$I_{jk}^{(b)} = \frac{I_{j1}}{I_{k1}}$$

Ha a bázisnak választott ország az 1. ország volt és mi a 3. országot akarjuk a 2.-hoz viszonyítani, akkor a 3. országot az 1.-höz viszonyító indexet el kell osztanunk a 2. országot az 1.-höz viszonyító indexszel. Ezt a módszert alkalmazva önkényesen járunk el a bázisország kiválasztásával. Attól függően, hogy melyik országot választjuk ki, más-más eredményhez jutunk. A többi követelménynek, így a különböző viszonylatokban végzett összehasonlítások közötti összhang követelményének is eleget teszünk.

c) Szintén csak az önkényesség kizárásának elvét sértjük meg akkor is, ha az országokat valamilyen módon (önkényesen!) sorrendbe állítjuk, az így adódó „szomszédos" országok között „láncindexet" számítunk a „legjobb" formula segítségével, majd a többi viszonylatok indexeit a „láncindexek" összeszorzása útján hozzuk létre. A sorrendtől függően természetesen különböző eredményekhez juthatunk. A képletek:

$$I_{j+1,j}^{(c)} = I_{j+1j} = \sqrt{\frac{\Sigma q_{j+1} p_j}{\Sigma q_j p_j} \cdot \frac{\Sigma q_{j+1} p_{j+1}}{\Sigma q_j p_{j+1}}}$$

$$I_{jk}^{(c)} = \prod_{r=j}^{k-1} I_{r,r+1} \quad (k > j)$$

d) Első pillanatra az önkényesség kizárására az látszik legegyszerűbb megoldásnak, ha valamilyen átlagos súlyokat alkalmazunk az indexek kiszámításánál. Közelebbről megvizsgálva a kérdést, egy sor súlyos probléma vetődik fel. Mik legyenek az átlagos súlyok például az országok közötti volumenindex-számításnál? Átlagos árként a különböző valutákban adott egységárak egyszerű számtani (vagy mértani) átlagát tekinteni nyilván értelmetlenség, hiszen egyes valutaegységek értéke sokszorosa lehet más valutáknak, mint például a rubel és forint esetében. Az árakat tehát előbb valamilyen árindexszel egységes szintre kell hozni. Árindexszámításnál azonban ugyanez a probléma lép fel, itt a termelt mennyiségek egyszerű átlaga az országcsoport legnagyobb országának mennyiségeihez állna legközelebb, a KGST országok esetében például közel ugyanazt kapnánk, mint ha a Szovjetunió mennyiségeivel súlyoznánk.

Ezen nehézségek mellett szinte eltörpül az a hátrány, hogy az átlagos árakkal számolt volumenindex és az átlagos mennyiségekkel képzett árindex szorzata nem adja meg az értékindexet.

e) Minden egyes viszonylatban a két ország adatait az összehasonlításba bevont valamennyi ország súlyadataival összehasonlítjuk. Így egy-egy viszonylatban annyi indexet kapunk, ahány ország szerepel az összehasonlításban. Ezekből mértani átlagot számítunk.[1] Itt nincs önkényesség, a különböző viszonylatok közötti összhang is fennáll. Egy követelményt azonban ez a módszer is

[1] Megjegyezzük, hogy ez és a következőkben ismertetendő módszer szerepel már *C. Gini* egy régebbi munkájában, mint több módszer közül két lehetőség, elsősorban egy országon belüli területi eltérések elemzésére szolgáló indexekre.

megsért: a szóban levő módszer szerint számított volumen- és árindex szorzata nem adja ki az értékindexet. A fenti módon definiált index képlete:

$$I_{jk}^{(e)} = \sqrt[n]{\frac{\Sigma q_j p_1}{\Sigma q_k p_1} \cdot \frac{\Sigma q_j p_2}{q_k p_2} \cdots \frac{\Sigma q_j p_n}{\Sigma q_k p_n}}$$

A fentiekben ismertetett módszerek közül négy módszer többé-kevésbé szorosan kapcsolódik a két ország összehasonlítása tekintetében legjobbnak minősített formulához. Az *a)* módszert alkalmazva az összes visznylatban megtartjuk a „legjobb" indexet. Így külön-külön minden viszonylatban a lehető legjobb az összehasonlításunk, de a különböző viszonylatok indexei ellentmondhatnak egymásnak, a többoldalú összehasonlítások nem egyértelműek, esetleg az országok rangsora sem egyértelmű. A *b)* és *c)* módszert alkalmazva a „legjobb" indexeknek csak egy részét tartjuk meg, a többit „feláldozzuk" az összhang „oltárán". Az *e)* módszer szerint számított formula felfogható a két ország viszonylatában legjobb formula egy bizonyos általánosításának. Ez esetben ugyanis annyi indexből számítunk mértani átlagot, ahány ország *(n)* az egész összehasonlításban szerepel és így $n = 2$ esetben a „legjobb" formulához jutunk.

Ismételten hangsúlyozzuk, hogy itt most csak az ismert három igen fontos követelmény szempontjából vizsgáljuk az indexeket. Támaszthatunk további követelményeket és ezek szempontjából az egyes módszerek további erényei és hibái tárhatók fel. Például az *e)* módszer alkalmazása esetén olyan eredményeket is kaphatunk, amelyek kívül esnek a két összehasonlított ország súlyaival számított index által adott határokon.

Drechsler László: „A használati érték és az érték szerepe a volumenindex számításánál" művében[2] az országok közötti összehasonlítás során történő indexszámítás problematikájának egy újabb megközelítésével is találkozunk. A szerző felveti azt a gondolatot, hogy az egyes viszonylatokban számított „legjobb" indexeket tekintsük kiindulópontoknak és ezeket igyekezzünk *korrigálni* oly módon, hogy az indexek közötti összhang fennálljon. Bemutat egy egyszerű korrekciós módszert, majd a könyv függelékében *(Éltető Ödön:* „Kiegészítő megjegyzés az indexek korrekciójával kapcsolatban") egy másik módszert találhatunk. Ezt ismertetjük a következőkben, majd újabb oldalról is megvilágítjuk e módszer előnyeit.

A 2. és 1. országot közvetlenül összehasonlító „legjobb" volumenindex:

$$I_{21} = \sqrt{\frac{\Sigma q_2 p_1}{\Sigma q_1 p_1} \cdot \frac{\Sigma q_2 p_2}{\Sigma q_1 p_2}}$$

A minden egyes viszonylatra kiszámított „legjobb" index birtokában az egyes viszonylatokra az adott közvetlenül számított index mellett közvetett úton is számíthatunk indexeket. Így például a 2. és 1. országot a 3. ország közbeiktatásával közvetve is összehasonlíthatjuk (a közbeiktatott ország sorszáma zárójelben felső indexként szerepel):

$$I_{21}^{(3)} = I_{23} \cdot I_{31} = \sqrt{\frac{\Sigma q_2 p_3}{\Sigma q_3 p_3} \cdot \frac{\Sigma q_2 p_2}{\Sigma q_3 p_2}} \cdot \sqrt{\frac{\Sigma q_3 p_1}{\Sigma q_1 p_1} \cdot \frac{\Sigma q_3 p_3}{\Sigma q_1 p_3}}$$

[2] A Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Közleményei 3. sz. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest. 1962. 91 old.

A közbeiktatott ország lehet a 4., 5., . . .,n. ország is. A közbeiktatott országok száma továbbá egynél több is lehet. Megkísérelhetjük, hogy egy adott viszonylatra *az összes lehetséges közvetlen és közvetett indexeket kiszámítjuk, majd ezeknek megfelelő módon súlyozott mértani átlagát képezzük.* Az így kapott formula egyszerűsíthető. A egynél több ország közbeiktatásával képezett közvetett indexek „kiesnek", marad *a közvetlen index négyzete és az egy ország közbeiktatásával számított közvetett indexek szorzata* (n-2 ilyen indexünk van), *ezek szorzatából kell n-edik gyököt vonnunk.*[3] A korrigált indexet I^*-gal jelölve a 2/1 viszonylat indexe:

$$I^*_{21} = \sqrt[n]{I^2_{21} \cdot I^{(3)}_{21} \cdot I^{(4)}_{21} \cdot \ldots \cdot I^{(n)}_{21}} = \sqrt[n]{I^2_{21} \cdot \underbrace{I_{23} \cdot I_{31}}_{I^{(3)}_{21}} \cdot \underbrace{I_{24} \cdot I_{41}}_{I^{(4)}_{21}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{I_{2n} \cdot I_{n1}}_{I^{(n)}_{21}}}$$

(A közvetlenül számított index négyzete mögött tulajdonképpen az 1. és 2. ország „közbeiktatása" rejtőzik. Ugyanis

$$I^{(1)}_{21} = I_{21} \cdot I_{11}, \quad I^{(2)}_{1} = I_{22} \cdot I_{21}, \quad \text{ahol} \quad I_{11} = I_{22} = 1.$$

Így tehát az 1-től az n-ig mindegyik ország szerepelt egyszer, mint „közbeiktatott".)

Hasonló módon számítjuk ki az összes kétoldalú összehasonlításokat célzó indexeket.

Nem nehéz belátni, hogy az így kiszámított indexek eleget tesznek mindazoknak a követelményeknek, amelyeket korábban támasztottunk. A volumen- és árindex szorzata egyenlő az értékindexszel, a különböző viszonylatok indexei tökéletes összhangban vannak egymással (ebből következőleg a szükséges reciprok-viszony is mindenütt fennáll), továbbá az összehasonlításban részt vevő országok között semmilyen önkényes megkülönböztetést nem teszünk az indexek kiszámításánál. Nem szükséges minden viszonylat indexét a fenti képlet szerint kiszámítani, elegendő az országok egy bizonyos sorrendje szerint n—1 „láncindexet" kiszámítani, a többi viszonylat indexe ezek összeszorzása útján megkapható. Az országok sorrendje bármilyen lehet, a végső eredményeket nem befolyásolja. (Természetesen a reciprok viszonyt, valamint az érték-, ár- és volumenindex közötti összefüggést is felhasználhatjuk az indexek kiszámításának egyszerűsítésére.) Indexeink további előnye, hogy kiszámításukhoz az egyes viszonylatok „legjobb" indexei képezték a kiinduló pontot. Ezeket az összhang kedvéért korrigáltuk s a korrekcióhoz más viszonylatoknak úgyszintén „legjobb" indexeit használtuk fel. Sőt ez a korrigált index is felfogható a két ország összehasonlítása esetén „legjobb" index általánosításának, mert ez az index (akárcsak a 2. pontban *e)* alatt említett index) $n = 2$ esetben a „legjobb" indexszel azonos.

Itt ismét megjegyezzük, hogy ez a módszer sem tökéletes. A közvetett összehasonlítás céljából számított indexek elméletileg kívül eshetnek az egyes termékek egyedi indexei által adott határokon (gyakorlatilag ennek bekövetkezése rendkívül valószínűtlen) és ezek a közvetett indexek is befolyásolják a fenti módon számított indexeket. Itt is hozunk tehát „áldozatot" a legfontosabbnak nyilvánított követelmények „oltárán", de ez az áldozat viszonylag kicsi.

[3] Részletesebben lásd a korábban hivatkozott mű 86. oldalát.

A bemutatott indexszámítási módszernek még egy további igen figyelemre méltó előnyös tulajdonsága is van, amelyet cikkünk 4. pontjában ismertetünk. Előbb azonban az említett indexszámítási módszereket egy példán keresztül szeretnénk illusztrálni.

3. PÉLDA A KORRIGÁLT INDEXEK KISZÁMÍTÁSÁRA

Bizonyos idő óta széleskörű nemzetközi összehasonlító munka folyik a KGST országok között. E nemzetközi összehasonlító számítások során mindig felmerül országok közötti árindex vagy volumenindex számításának szükségessége. Az előzőkben tárgyalt korrigált indexeket nem lehet minden esetben meghatározni, ehhez ugyanis az kell, hogy az összehasonlításban szereplő valamennyi ország termelése (fogyasztása) az összes szóban forgó pénzegységben ki legyen számítva. E számításokkal járó gyakorlati nehézségek miatt sok esetben egyszerűbb, s ennek következtében több alapvető követelményt megsértő módszerekkel kell megelégednünk. Vannak azonban olyan esetek is, amikor az összes szükséges számítások elkészülnek, amikor tehát módunkban áll az elméleti követelményeknek megfelelő indexeket konstruálni. Így például a közelmúltban a hét KGST ország mezőgazdasági termelésének összehasonlítása során a rendelkezésre álló adatok lehetővé tették az előzőkben ismertetett módszerek alkalmazását is.

Bár az alábbi példa csupán illusztratív jellegű, s a számítások egyszerűsítése, valamint a könnyebb áttekinthetőség kedvéért csak öt országot szerepeltetünk, a fentieket szükségesnek láttuk megemlíteni annak alátámasztására, hogy a cikkben közölt indexszámítási módszer nem csupán elméleti jelentőségű, hanem a gyakorlatban folyó nemzetközi összehasonlításoknál is jól alkalmazható.

Tegyük fel, hogy az első országhoz viszonyított indexek az öt ország valutájában az alábbiak:

Ország	1.	2.	3.	4.	5.
	ország valutájában (százalék)				
2.	110	86	75	104	85
3.	114	98	72	108	80
4.	94	80	70	85	78
5.	106	93	61	102	72

Látható, hogy attól függően, hogy milyen valutában történik a számítás, az országok sorrendje és egymáshoz viszonyított arányuk erősen eltérő.

Az összehasonlítás kedvéért az alábbiakban megadjuk a 2. pont *a), b), c), e)* bekezdésében felsorolt négy különböző módszerrel számított indexeket, végül a javasolt módszer alapján számolt korrigált indexeket. A *b)* módszernél az 1. országot választjuk bázisnak, az összes többi összehasonlítás ezen keresztül történik, a *c)* módszernél pedig a számozás szerint rendezzük sorrendbe az országokat. Az index-táblázatokban a j-edik sor k-adik oszlopában mindig a k-adik országnak a j-edikhez viszonyított indexe áll, a k-adik sor j-edik oszlopában pedig ennek reciproka *a)* módszer: az egyes országok „legjobb” közvetlen összehasonlító indexei:

Ország	1.	2.	3.	4.	5.
	ország valutájában (százalék)				
1.	100,0	97,3	92,2	89,4	87,4
2.	102,8	100,0	104,6	87,2	95,7
3.	108,5	95,6	100,0	87,5	87,3
4.	111,9	114,7	114,3	100,0	105,3
5.	114,4	104,5	114,5	95,0	100,0

b) módszer: az 1. országon keresztül számított indexek:

Ország	1.	2.	3.	4.	5.
	ország valutájában (százalék)				
1.	100,0	97,3	92,2	89,4	87,4
2.	102,8	100,0	94,8	91,9	89,8
3.	108,5	105,6	100,0	97,0	94,8
4.	111,9	108,9	103,2	100,0	97,8
5.	114,4	111,3	105,5	102,3	100,0

c) módszer: az 1—2, 2—3, 3—4, 4—5 láncidexek alapján számított indexek:

Ország	1.	2.	3.	4.	5.
	ország valutájában (százalék)				
1.	100,0	97,3	101,8	89,1	93,8
2.	102,8	100,0	104,6	91,5	96,4
3.	98,3	95,6	100,0	87,5	92,1
4.	112,3	109,3	114,3	100,0	105,3
5.	106,7	103,8	108,6	95,0	100,0

d) módszer: a különböző valutákban számított indexek mértani átlaga:

Ország	1.	2.	3.	4.	5.
	ország valutájában (százalék)				
1.	100,0	91,1	93,0	81,0	84,9
2.	109,8	100,0	102,1	89,0	93,2
3.	107,5	97,9	100,0	87,1	91,3
4.	123,4	112,4	114,7	100,0	104,8
5.	117,8	107,3	109,5	95,4	100,0

Végül az I^*_{jk} korrigált indexek a következők:

Ország	1.	2.	3.	4.	5.
	ország valutájában (százalék)				
1.	100,0	95,2	97,6	85,4	88,4
2.	105,1	100,0	102,5	89,7	92,9
3.	102,5	97,5	100,0	87,5	90,6
4.	117,1	111,5	114,3	100,0	103,5
5.	113,2	107,7	110,5	96,7	100,0

Az *a)* módszer kivételével a különböző módon kapott indexek az országcsoportról egységes értékelést nyújtanak, ennek fejében azonban a kapott indexek több-kevesebb mértékben eltérnek a közvetlen összehasonlításnál kapott legjobb indexektől. Nyilvánvaló, hogy a különböző módszerek közül azt kell előnyben részesítenünk, amelyik olyan indexeket szolgáltat, amelyek bizonyos értelemben legkevésbé térnek el a közvetlen összehasonlításnál legjobbnak talált indexektől. A következő pontban megmutatjuk, hogy ennek az újabb követelménynek a fényében is a javasolt I_{jk}^* korrigált index mutatkozik a legjobb megoldásnak.

4. A KORRIGÁLT INDEX MEGHATÁROZÁSA A LEGKISEBB NÉGYZETEK ELVE ALAPJÁN

A korrigált indexszel szemben támasztott újabb követelmény tehát úgy fogalmazható meg, hogy a páros összehasonlításban legjobbnak tartott indexeket a lehető legkisebb mértékben módosítsuk úgy, hogy az így kapott indexek már eleget tegyenek az összhang követelményének. Itt még pontosabban meg kell mondanunk, hogy mit értünk a lehető legkisebb mértékű módosításon. Tapasztalati adatok kiegyenlítésekor általában az eltérések négyzetösszegét igyekeznek minimalizálni (bár néha az abszolút eltérések összegét is szokták használni). Kézenfekvő, hogy itt is a közvetlen és korrigált indexek eltérésének négyzetösszegét tekintsük a módosítás mértékének. Kiderül azonban, hogy jelen esetben ez a mérték nem felel meg a probléma természetének, sokkal célravezetőbb a logaritmikus eltérések négyzetösszegét minimalizálni.

A feladat tehát a következő: adva van n országból álló országcsoport és a páros összehasonlításnál legjobbnak elfogadott I_{jk} indexek. Ezek az I_{jk} indexek úgy módosítandók, hogy egyrészt az I_{jk}^* korrigált indexek eleget tegyenek az összhang követelményét kifejező

$$I_{jk}^* = I_{jl}^* \cdot I_{lk}^* \qquad /1/$$

egyenlőségnek tetszőleges j, k, l-re, másrészt a

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (\log I_{jk} - \log I_{jk}^*)^2$$

kifejezés minimális legyen.

Vezessük be az $F_{jk} = \log I_{jk}$ és $C_{jk} = \log I_{jk}^*$ jelöléseket. Nyilvánvalóan $F_{jj} = C_{jj} = 0$ és $F_{jk} = -F_{kj}$, valamint $C_{jk} = -C_{kj}$, ezért

$$(F_{jk} - C_{jk})^2 = (F_{kj} - C_{kj})^2$$

Így Δ a következőképp írható fel:

$$\Delta = 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} (F_{jk} - C_{jk})^2 \qquad /2/$$

A feladat tehát a /2/ négyzetösszeg minimalizálása C_{jk}-ban, miközben C_{jk} eleget tesz az /1/ követelmény logaritmizált alakjának, azaz

$$C_{jk} = C_{jl} + C_{lk}$$

Ezt az összefüggést felhasználva és bevezetve a $C_{j,j+1} = C_j$ jelölést, C_{jk} a következőképpen fejezhető ki:

$$C_{jk} = C_j + C_{j+1} + \cdots + C_{k-1} = \sum_{i=j}^{k-1} C_i$$

Írjuk ezt be a /2/ kifejezésbe, azt kapjuk, hogy

$$\Delta' = \frac{1}{2}\Delta = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \left(\sum_{i=j}^{k-1} C_i - F_{jk} \right)^2 \qquad /3/$$

Ezek szerint elegendő n—1 számú korrigált index logaritmusát azaz a $C_1, \ldots, C_{n-1}$ mennyiségeket meghatározni, ezekből az összes többi megkapható.

Írjuk ki részletesen a /3/ négyzetösszeget:

$$\begin{aligned} \Delta' = {} & (C_1 - F_{12})^2 + (C_1 + C_2 - F_{13})^2 + \cdots + (C_1 + C_2 + \cdots + C_{n-1} - F_{1n})^2 + \\ & + (C_2 - F_{23})^2 + (C_2 + C_3 - F_{24})^2 + \cdots + (C_2 + C_3 + \cdots + C_{n-1} - F_{2n})^2 + \cdots + \\ & + (C_{n-2} - F_{n-2,\, n-1})^2 + (C_{n-2} + C_{n-1} - F_{n-2,n})^2 + (C_{n-1} - F_{n-1,\, n})^2 \end{aligned}$$

Itt egy sor a j egy-egy rögzített értékének megfelelő négyzetösszeg a fenti /3/ kifejezésben. Egy többváltozós függvény minimumát meghatározhatjuk úgy, hogy előbb vesszük a minimumot az első változóra, rögzítettnek tekintve a többi változót, majd az így kapott minimum minimumát határozzuk meg a második változóra stb. Azaz

$$\min_{C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}} \Delta' = \min_{C_{n-1}} [\cdots (\min_{C_2} (\min_{C_1} \Delta')) \cdots]$$

A fenti részletes felírásból látható, hogy C_1 csak az első sorban szerepel, ezért amikor C_1-re vesszük a minimumot, csak ez a sor érdekes. C_1-re véve a minimumot C_2-t, ... C_{n-1} -et fixnek tekintjük, ezért az első sort így írjuk fel:

$$(C_1 - F_{12})^2 + [C_1 - (F_{13} - C_2)]^2 + [C_1 - (F_{14} - C_2 - C_3)]^2 + \cdots + [C_1 - (F_{1n} - C_2 - \cdots - C_{n-1})]^2$$

Ismeretes azonban, hogy az

$$(y - x_1)^2 + (y - x_2)^2 + \cdots + (y - x_n)^2$$

kifejezés akkor minimális, ha y az x_i -ik számtani közepe, azaz $y = \frac{1}{n} \Sigma\, x_i$. Ezt a tényt felhasználva azt kapjuk, hogy Δ' C_1-ben akkor minimális, ha

$$C_1 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=2}^{n} F_{1i} - (n-2)\, C_2 - (n-3) C_3 - \cdots - 2C_{n-2} - C_{n-1} \right]$$

azaz, ha fennáll az

$$(n-1) C_1 + (n-2)\, C_2 + (n-3)\, C_3 + \cdots + 2C_{n-2} + C_{n-1} = \sum_{i=2}^{n} F_{1i} \qquad /4/$$

egyenlet. Ha most C_2-re vesszük Δ' minimumát, akkor /3/ részletes felírásában az első két sort kell figyelembe venni, kivéve a legelső négyzetet, mert abban nem szerepel C_2. Az előbbi meggondolást alkalmazva azt kapjuk, hogy Δ' C_2-ben akkor minimális, ha

$$C_2 = \frac{1}{2\,(n-2)} \left[\sum_{i=3}^{n} F_{1i} + \sum_{i=3}^{n} F_{2i} - (n-2) C_1 - 2(n-3) C_3 - \cdots - 2 \cdot 2C_{n-2} - 2C_{n-1} \right]$$

amiből az

$$(n-2)C_1+2[(n-2)C_2+(n-3)C_3+\cdots+2C_{n-2}+C_{n-1}]=\sum_{i=3}^{n}F_{1i}+\sum_{i=3}^{n}F_{2i} \qquad /5/$$

egyenletet kapjuk. Ha most a /4/ egyenlet kétszereséből kivonjuk az /5/ egyenletet azt kapjuk, hogy

$$nC_1=2\sum_{i=2}^{n}F_{1i}-\sum_{i=3}^{n}F_{1i}-\sum_{i=3}^{n}F_{2i}$$

vagyis

$$C_1=\frac{1}{n}\left(2F_{12}+\sum_{i=3}^{n}F_{1i}+\sum_{i=3}^{n}F_{i2}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(F_{1i}+F_{i2}) \qquad /6/$$

Ha most a logaritmusokról visszatérünk az eredeti indexekre, azt kapjuk, hogy $\Delta' I_{12}^*$ -ban akkor minimális, ha

$$I_{12}^*=\sqrt[n]{I_{12}^2\cdot I_{13}I_{32}\cdots I_{1n}I_{n2}}=\sqrt[n]{\prod_{l=1}^{n}I_{1l}I_{l2}} \qquad /7/$$

A többi optimális korrigált index meghatározásához eljárhatnánk úgy, hogy a fenti gondolatmenetet alkalmazva meghatározzuk Δ' minimumát C_3-ban, C_4-ben stb. Erre azonban nincs szükség. Az ugyanis, hogy az n ország közül melyiket jelöljük 1, 2, ..., n-nel, teljesen tetszőleges, ezért a C_1-re, illetve I_{12}^*-ra kapott eredmény az országok bármilyen sorrendje mellett is érvényes, vagyis a C_2, C_3, ..., C_{n-1} értékeket, illetve az I_{23}^*, I_{34}^*, ..., $I_{n-1,n}^*$ optimális korrigált indexeket egyszerűen úgy kapjuk meg, hogy /6/-ban, illetve /7/-ben az 1, 2, ..., n számokat ciklikusan permutáljuk. Így tehát általában

$$C_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(F_{ji}+F_{i,j+1})$$

és

$$I_{j,j+1}^*=\sqrt[n]{\prod_{l=1}^{n}I_{jl}I_{l,j+1}}$$

Az I_{12}^*, I_{23}^*, ..., $I_{n-1,n}^*$ korrigált indexekből a többi korrigált indexet tehát egy tetszőleges I_{jk}^* indexet az /1/ összefüggés ismételt alkalmazásával kapunk meg, azaz

$$I_{jk}^*=I_{j,j+1}^*\cdot I_{j+1,j+2}^*\cdots I_{k-1,k}^*$$

vagy a szorzásokat elvégezve az adódik, hogy

$$I_{jk}^*=\sqrt[n]{\prod_{=1}^{n}I_{jl}I_{lk}}=\sqrt[n]{I_{j1}I_{1k}\cdot I_{j2}I_{2k}\cdots I_{jn}I_{nk}}$$

amivel tetszőleges országpár esetén megkaptuk a keresett optimális korrigált indexet.

Megjegyezzük, hogy természetesen ugyanezt az eredményt a Δ' $C_1, C_2, \ldots$ $\ldots, C_{n-1}$ szerint való differenciálása és a kapott egyenletek megoldása révén is megkaphattuk volna.

Azt kaptuk tehát, hogy a javasolt I^*_{jk} korrigált index az előzőkben kimutatott jó tulajdonságai mellett még annak a követelménynek is eleget tesz, hogy a páronkénti legjobb indexek és a korrigált indexek logaritmikus eltérésének négyzetösszege erre az indexre minimális.

Az előző pont példájánál Δ' értéke az I^*_{jk} korrigált indexnél $0{,}1944.10^{-2}$, míg a *b)* *c)* és *e)* módszereknél ennek a kifejezésnek az értéke rendre $0{,}7426 \cdot 10^{-2}$, $0{,}3794 \cdot 10^{-2}$, és $0{,}3480 \cdot 10^{-2}$. Megjegyezzük, hogy eddigi vizsgálataink során azt tapasztaltuk, hogy az I^*_{jk} korrigált index nemcsak a Δ logaritmikus négyzetes eltérést minimalizálja, hanem az eltérés más mértékeire is a vizsgált módszerek közül ez adta a legkisebb értéket, például a közönséges négyzetes eltérésre, vagy az eltérések abszolút értékének összegére is. Így a bemutatott példában

$$\sum_j \sum_k \left(I_{jk} - I^*_{jk}\right)^2 = 195{,}95 \qquad /8/$$

Ugyanez a kifejezés a másik három index esetén 793,07, 403,18 és 385,59, azaz a javasolt korrigált index átlagosan lényegesen kisebb eltérést jelent a páronkénti legjobb indexektől, mint más — az összhangot szintén biztosító — módszerek.

Hasonló eredményeket kaptunk a 7 európai KGST ország mezőgazdasági termelésének összehasonlítása során, ahol az I^*_{jk} indexet használva a Δ eltérés csak 31 százalékát tette ki annak az eltérésnek, amit az $I^{(b)}_{jk}$ indexek alkalmazása során adódott, bázisországnak a Szovjetuniót véve és körülbelül fele volt az $I^{(e)}_{jk}$ index alkalmazása esetén adódó eltérésnek. Majdnem pontosan ugyanezeket az arányokat kapjuk akkor is, ha Δ helyett a közönséges négyzetes eltérést vagy az abszolút eltérést alkalmazzuk az I_{jk} indexektől való eltérés mérésére.

Ezzel természetesen nem állítjuk azt, hogy egyes konkrét esetekben a /8/ közönséges négyzetes eltérést nem lehet valamilyen más — a konkrét esetre alkalmazott — korrekcióval kisebbé tenni annál, mint ami az általunk javasolt korrigált indexszel adódik, hiszen ez utóbbi csak a logaritmikus négyzetes eltérést minimalizálja feltétlenül. További vizsgálatot igényel, hogy más — a közvetlen és korrigált indexek eltérését mérő — kifejezések minimumát milyen indexformulák szolgáltatják, meggyőződésünk szerint azonban egyedül a Δ kifejezés esetén vezet a minimumfeladat egyszerű, értelmes indexformulára.

Úgy gondoljuk, hogy a fenti eredmény nem pusztán matematikai szempontból érdekes, hanem több ország egyidejű összehasonlítása esetén a gyakorlati statisztikai elemzés szempontjából is hasznos, hiszen megadja, hogyan lehet a különböző indexek közötti összhangot biztosítani úgy, hogy átlagosan a legkisebb mértékben rontsuk a páros összehasonlítások minőségét.